Université de Cergy-Pontoise *UFR économie et gestion*

L2 DU ECE & CMI EF, 2018 - 2019

Probabilités
Examen du 17 décembre 2018

Durée : 2 heures

L'objectif ici n'est pas de tout traiter mais, d'en couvrir une part significative de manière convaincante. Les réponses devront être soigneusement argumentées et justifiées. Les points 1., 2. *et* 3. *de l'exercice sont indépendants.*
Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

Exercice (12 pts)

1. On dispose de n boules numérotés de 1 à n que l'on souhaite répartir dans 3 tiroirs numérotés $T_1, T_2, , T_3$; chaque tiroir étant suffisamment grand pour pouvoir contenir les n boules.
   (a) Déterminer le nombre de répartitions possibles.
   (b) Déterminer le nombre de répartition où seul le tiroir T_1 est vide.
   (c) Déterminer le nombre de répartition où deux tiroirs restent vides.
   (d) Déterminer le nombre de répartition où aucun des trois tiroirs n'est vide.
2. Une urne contient une boule blanche et une boule noire. On considère le jeu qui consiste à effectuer des tirages avec remise dans cette urne jusqu'à l'obtention d'une boule blanche, ajoutant une boule noire (dans l'urne) après chaque tirage d'une boule noire.
   (a) Quelle est la probabilité que la partie s'arrête au 2ème tirage?
   (b) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer la probabilité de l'événement "arrêt de la partie au $n^{\text{ème}}$ tirage".
3. Soit X une variable aléatoire de densité

$$f(x) = \begin{cases} a(1+x) & \text{si } -1 \leq x \leq 0 \\ a(1-x) & \text{si } 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

   (a) Déterminer la constante a.
   (b) Déterminer la fonction de répartition de X.
   (c) Calculer $P\big(-\frac{1}{3} \leq X \leq \frac{1}{3}\big)$.
   (d) Calculer l'espérance et la variance de X.

Problème (13 pts)

Une entreprise veut recruter deux employés. Le nombre de candidats à ces deux postes est très grand ; on suppose dans ce problème qu'il est infini. L'entreprise fait passer un même test à tour de rôle (suivant un ordre aléatoire) aux candidats jusqu'à l'obtention de deux réussites. Les deux premiers candidats qui réussissent au test sont alors engagés. Pour un candidat donné, on considère

l'événement "réussir au test" comme un succès et "ne pas réussir au test" comme un échec. Pour chaque candidat, la probabilité de réussir le test est $p \in]0,1[$. Les tests s'effectuent de manière indépendante i.e. on suppose que les événements A_i : "obtenir un succès au $i$ème test", $i \in \mathbb{N}^*$, sont mutuellement indépendants.
On désigne par X_1 (respectivement X_2) la variable aléatoire égale au nombre de tests effectués jusqu'à l'obtention du premier (respectivement deuxième) succès. L'objectif de ce problème est de déterminer les lois de X_1 et X_2 ; supposés être définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

1. Déterminer la probabilité de l'événement A : "on n'obtient jamais de succès".
2. (a) Déterminer la loi de X_1.
   (b) Quelle est cette loi? En déduire $E(X_1)$ et $Var(X_1)$.
3. Déterminer la probabilité de l'événement B : "on obtient un seul succès au cours de ces tests".
4. On considère l'événement C : "on n'obtient jamais le deuxième succès". Ecrire l'événement C en fonction des événements A et B ; et en déduire $P(C)$.
5. Déterminer $X_2(\Omega)$.
6. Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, déterminer la probabilité de l'événement D_k : "obtenir un seul succès au cours des k premiers tests".
7. Soit $k \in X_2(\Omega)$.
   (a) Ecrire l'événement $\{X_2 = k\}$ en fonction des événements D_{k-1} et A_k.
   On admet que les événements D_{k-1} et A_k sont indépendants.
   (b) Calculer $P(X_2 = k)$.