

Licence M.A.S.S. deuxième année 2011 - 2012

Corrections d'exercices de la Feuille 2

Intégrales multiples

(1) (*) Calculer $\iint_{\Delta} \frac{dx dy}{x^2 y}$ où $\Delta = [0, 1]^2$.

Proof: On a $\iint_{\Delta} \frac{dx dy}{x^2 y} = \int_0^1 \frac{1}{x^2} dx \int_0^1 \frac{1}{y} dy$ or $\int_0^1 \frac{1}{y} dy$ n'existe pas (critère de Riemann). On conclue donc que $\iint_{\Delta} \frac{dx dy}{x^2 y}$ n'existe pas. \square

(2) (*) Calculer $\iint_{\Delta} \frac{dx dy}{(2-x+2y)^3}$ où $\Delta = [0, 1]^2$.

Proof: On a $\iint_{\Delta} \frac{dx dy}{(2-x+2y)^3} = \int_0^1 \left[\frac{1}{2(2-x+2y)^2} \right]_0^1 dy = \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{1}{(1+2y)^2} dy - \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{1}{(2+2y)^2} dy = \frac{1}{8} \left[-\frac{1}{1+2y} \right]_0^1 - \frac{1}{8} \left[-\frac{1}{2+2y} \right]_0^1 = \frac{5}{96}$. \square

(3) (*) Calculer $\iint_{\Delta} \frac{dx dy}{(2-x+2y)^{-1}}$ où $\Delta = \{(x, y) \in [0, 1]^2, x \leq y\}$.

Proof: Le théorème de Fubini nous permet d'écrire, comme l'intégrale est définie, que $\iint_{\Delta} \frac{dx dy}{(2-x+2y)^{-1}} = \int_0^1 \int_0^y (2-x+2y) dx dy = \int_0^1 \left[2x - \frac{x^2}{2} + 2yx \right]_0^y dy = \int_0^1 2y - \frac{y^2}{2} + 2y^2 dy = \dots$ \square

(4) (**) Calculer $\iint_{\Delta} \frac{y}{x+y} dx dy$ où $\Delta = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, 0 \leq y \leq x^2 \leq 1\}$.

Proof: En traçant Δ , on s'aperçoit que l'on peut paramétrer Δ par $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2, x \in [-1, 1], 0 \leq y \leq x^2\}$. Il vient donc, par le théorème de Fubini, $\iint_{\Delta} \frac{y}{x+y} dx dy = \int_{-1}^1 \int_0^{x^2} \frac{y}{x+y} dy dx = \int_{-1}^1 \int_0^{x^2} 1 - \frac{x}{x+y} dy dx = \int_{-1}^1 x^2 dx - \int_{-1}^1 x [\ln(x+y)]_0^{x^2} dx = \frac{2}{3} - \int_{-1}^1 x \ln(1+x) dx$. Au moyen d'une IPP, on remarque que $\int_{-1}^1 x \ln(1+x) dx = [x((1+x)\ln(1+x) - x)]_{-1}^1 - \int_{-1}^1 ((1+x)\ln(1+x) - x) dx$ et donc que $\int_{-1}^1 x \ln(1+x) dx = \ln(2) - \frac{1}{2} \int_{-1}^1 \ln(1+x) dx$. Nous avons donc $\iint_{\Delta} \frac{y}{x+y} dx dy = \frac{2}{3} - \ln(2) + \frac{1}{2} \int_{-1}^1 \ln(1+x) dx = \frac{2}{3} - \ln(2) + \frac{1}{2} [(1+x)\ln(1+x) - x]_{-1}^1 = -\frac{1}{3}$ (Nous avons utilisé le fait que $u \ln(u) \xrightarrow{u \rightarrow 0} 0$). \square

(5) (**) Calculer $\iint_{\Delta} \frac{1}{a^2+x^2+y^2} dx dy$ où $\Delta = \{(x, y) \in [0, \infty[^2, x^2 + y^2 \leq a^2\}$ avec $a > 0$ fixé.

Proof: En traçant Δ , on peut s'apercevoir que le domaine est un quart de cercle. Il convient donc d'utiliser les coordonnées polaires. On procède au changement de variables $x = r \cos(\theta)$ et $y = r \sin(\theta)$. De plus, il faut respecter les conditions $x = r \cos(\theta) > 0$ et $y = r \sin(\theta) > 0$, ce qui implique $\theta \in [0, \pi/2]$. On a également $0 \leq r \leq a$. Le déterminant du Jacobien associé à ce changement de variable est r . Le domaine Δ s'écrit alors $\{(r, \theta) \in [0, \infty[^2, 0 \leq r \leq a, 0 \leq \theta \leq \pi/2\}$. Il

vient donc $\iint_{\Delta} \frac{1}{a^2+x^2+y^2} dx dy = \int_0^{\pi/2} \int_0^a \frac{r}{a^2+r^2} dr d\theta = \frac{1}{2} \int_0^{\pi/2} [\ln(a^2+r^2)]_0^a d\theta = \frac{\pi}{4} \ln(2)$. \square

(6) (*) Calculer $\iint_{\Delta} \cos(x+y) dx dy$ où $\Delta = \{(x, y) \in [0, \infty[^2, x+y \leq 1\}$.

Proof: On peut paramétrer Δ par $\{(x, y) \in [0, \infty[^2, 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1-x\}$. Il vient donc $\iint_{\Delta} \cos(x+y) dx dy = \int_0^1 \int_0^{1-x} \cos(x+y) dy dx = \int_0^1 [\sin(x+y)]_0^{1-x} dx = \sin(1) - [\cos(x)]_0^1 = \sin(1) - \cos(1) + 1$. \square

(7) (*) Calculer $\iiint_{\Delta} (x+y)z dx dy dz$, puis $\iiint_{\Delta} \cos(x+y+2z+1) dx dy dz$, où $\Delta = \{(x, y, z) \in [0, \infty[^3, x+y+2z \leq 1\}$.

Proof: Il nous faut commencer par reparamétrer Δ . On peut tracer Δ ou raisonner directement pour trouver $\Delta = \{(x, y, z) \in [0, \infty[^3, 0 \leq z \leq \frac{1}{2}, 0 \leq y \leq 1-2z, 0 \leq x \leq 1-2z-y\}$. Il vient alors, pour la première intégrale, $\iiint_{\Delta} (x+y)z dx dy dz = \int_0^{\frac{1}{2}} z \int_0^{1-2z} \int_0^{1-y-2z} (x+y) dx dy dz = \dots$ Pour la deuxième intégrale, on procède de la même manière pour trouver $\iiint_{\Delta} \cos(x+y+2z+1) dx dy dz = \int_0^{\frac{1}{2}} \int_0^{1-2z} \int_0^{1-y-2z} \cos(x+y+2z+1) dx dy dz = \dots$ \square

(8) (*) Calculer $\iint_{\Delta} x \sin(xy) dx dy$ où $\Delta = \{(x, y) \in]0, 1/2[\times]0, \pi/2[\}$.

Proof: On a $\iint_{\Delta} x \sin(xy) dx dy = \int_0^{1/2} x \int_0^{\pi/2} \sin(xy) dy dx = \int_0^{1/2} x [-\frac{1}{x} \cos(xy)]_0^{\pi/2} dx = \int_0^{1/2} 1 - \cos(\frac{\pi x}{2}) dx = [-\frac{2}{\pi} \sin(\frac{\pi x}{2})]_0^{1/2} + \frac{1}{2} = \frac{\pi-2\sqrt{2}}{2\pi}$. \square

(9) (**) Calculer $\iint_{\Delta} xy dx dy$ où $\Delta = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, x^2 + y^2 \leq 1\}$.

Proof: On s'aperçoit que le domaine est un cercle de rayon 1, on passe donc en polaires. Il vient donc $\iint_{\Delta} xy dx dy = \int_0^1 \int_0^{2\pi} r^3 \cos(\theta) \sin(\theta) d\theta dr$. Or $\int_0^{2\pi} \cos(\theta) \sin(\theta) d\theta = [\sin^2(\theta)]_0^{2\pi} - \int_0^{2\pi} \cos(\theta) \sin(\theta) d\theta$. D'où $2 \int_0^{2\pi} \cos(\theta) \sin(\theta) d\theta = 0$ et par conséquent, $\iint_{\Delta} xy dx dy = 0$. \square

(10) (**) Calculer $\iiint_{\Delta} \frac{z^3}{(y+z)(x+y+z)} dx dy dz$ où $\Delta = \{(x, y, z) \in [0, \infty[^3, x+y+z \leq 1\}$ (On pourra poser $u = x+y+z$, $uv = z+y$ et $z = uvw$).

Proof: On pose $u = x+y+z$, $uv = z+y$ et $z = uvw$. Il vient donc $u = x+y+z$, $v = \frac{z+y}{x+y+z}$ et $w = \frac{z}{z+y}$ (on voit avec ces expressions que ce changement de variables est bien un C^1 -difféomorphisme). Le déterminant du jacobien de ce changement de variables est u^2v . Il convient maintenant de trouver l'image du domaine Δ . Comme $u = x+y+z \leq 1$, on a $0 \leq u \leq 1$. Comme $v = \frac{z+y}{x+y+z} \leq 1$, on a $0 \leq v \leq 1$ car $uv = z+y \leq 1 \Rightarrow v \leq \frac{1}{u}$ et $\frac{1}{u} \geq 1$. Comme $w = \frac{z}{z+y}$, on a $0 \leq w \leq 1$. Il vient donc $\Delta = \{(u, v, w) \in [0, 1]^3\}$. On a alors $\iiint_{\Delta} \frac{z^3}{(y+z)(x+y+z)} dx dy dz = \int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 u^3 v^3 w^3 dw dv du = \left[\int_0^1 u^3 du \right]^3 = \left(\frac{1}{4}\right)^3 = \frac{1}{64}$. \square

(11) (**) Calculer $\iiint_{\Delta} xyz dx dy dz$ où $\Delta = \{(x, y, z) \in [0, \infty[^3, x+y+z \leq 1\}$.

Proof: On peut paramétrer Δ par $\{(x, y, z) \in [0, \infty[^3, 0 \leq x \leq 1 - y - z, 0 \leq y \leq 1 - z, 0 \leq z \leq 1\}$. Il vient alors $\iiint_{\Delta} xyz dx dy dz = \int_0^1 z \int_0^{1-z} y \int_0^{1-y-z} x dx dy dz$, qui après intégrations successives nous donne $\iiint_{\Delta} xyz dx dy dz = \frac{1}{720}$. \square

(12) (**) Déterminer l'ensemble des valeurs de α telles que $I_\alpha = \int_1^\infty \int_1^\infty (x+y)^\alpha dx dy$ existe, auquel cas, calculer I_α . Même question pour $J_\alpha = \int_0^1 \int_0^1 (x+y)^\alpha dx dy$.

Proof: On a $I_\alpha = \int_1^\infty \int_1^\infty (x+y)^\alpha dx dy = \int_1^\infty [A] dy$ avec $A = \int_1^\infty (x+y)^\alpha dx$. Pour que A existe, il faut que $\alpha > 1$ (critère de Riemann). Or $A = \left[\frac{(x+y)^{1-\alpha}}{1-\alpha} \right]_1^\infty = \frac{(1+y)^{1-\alpha}}{\alpha-1}$. Soit maintenant $B = \int_1^\infty \frac{(1+y)^{1-\alpha}}{\alpha-1} dy$. Toujours d'après le critère de Riemann, B n'existe que si $\alpha - 1 > 1 \Leftrightarrow \alpha > 2$. I_α n'existe donc que si $\alpha > 2$ et vaut dans ce cas $\frac{2^{2-\alpha}}{(\alpha-1)(\alpha-2)}$.

Traitons maintenant le cas de J_α . On a $J_\alpha = \int_0^1 \int_0^1 (x+y)^\alpha dx dy = \int_0^1 [C] dy$ avec $C = \int_0^1 (x+y)^\alpha dx$. Or $C = \int_0^1 (x+y)^\alpha dx$ n'existe que si $-\alpha < 1 \Leftrightarrow \alpha > -1$ et vaut dans ce cas $C = \frac{(1+y)^{\alpha+1}}{\alpha+1} - \frac{y^{\alpha+1}}{\alpha+1}$. Soit maintenant $D = \int_0^1 \frac{(1+y)^{\alpha+1}}{\alpha+1} dy - \int_0^1 \frac{y^{\alpha+1}}{\alpha+1} dy$. La première intégrale existe toujours et vaut $\frac{2^{\alpha+2}-1}{(\alpha+1)(\alpha+2)}$. La deuxième n'existe que si $-\alpha - 1 < 1 \Leftrightarrow \alpha > -2$. I_α n'existe donc que si $\alpha > -1$ et vaut dans ce cas $\frac{2^{2+\alpha}-1}{(\alpha+1)(\alpha+2)}$. \square

(14) (***) Calculer le volume de l'ensemble $\Delta = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, x^2 + z^2 \leq a^2, y^2 + z^2 \leq a^2\}$ avec $a > 0$ (on pourra commencer par tracer Δ).

Proof: On effectue un changement de variable en polaire dans le plan (x, y) et on obtient $\iiint_{\Delta} dx dy dz = \int_{-a}^a 4(a^2 - z^2) dz = \frac{16}{3} a^3$. \square

(15) (***) Pour $(a, b) \in]1, \infty[^2$, calculer $\int_0^\pi \ln \left(\frac{a - \cos(t)}{b - \cos(t)} \right) dt$ (on pourra introduire la fonction à deux variables $(u, t) \mapsto (u - \cos(t))^{-1}$ et utiliser le Théorème de Fubini).

Proof: Remarquons que l'on a $\int_0^\pi \ln \left(\frac{a - \cos(t)}{b - \cos(t)} \right) dt = \int_0^\pi \int_a^b g(u, t) du dt$ où $\int g(u, t) du = \ln(u - \cos(t))$. On peut appliquer le théorème de Fubini et on obtient $\int_0^\pi \int_a^b g(u, t) du dt = \int_a^b \int_0^\pi \frac{1}{u - \cos(t)} dt du$. Posons $v = \tan^2(t/2)$, on a $dt = \frac{2dv}{1+v^2}$. On sait également que dans ce cas la, $\cos(t) = \frac{1-v^2}{1+v^2}$. On a donc $\int_0^\pi \int_a^b g(u, t) du dt = \int_a^b \int_0^\infty \frac{1}{u - \frac{1-v^2}{1+v^2}} \frac{2}{1+v^2} dv du = \int_a^b \frac{2}{u-1} \int_0^\infty \frac{1}{1 + \frac{u+1}{u-1} v^2} dv du$. On procède maintenant au changement de variables $w = \sqrt{\frac{u+1}{u-1}} v$, avec $dv = \sqrt{\frac{u-1}{u+1}} dw$. Il vient $\int_0^\pi \int_a^b g(u, t) du dt = \int_a^b \frac{2}{u-1} \int_0^\infty \frac{1}{1 + \frac{u+1}{u-1} v^2} dv du = \int_a^b \frac{2}{u-1} \int_0^\infty \frac{1}{1+w^2} \sqrt{\frac{u-1}{u+1}} dw du = \int_a^b \frac{\pi}{\sqrt{u^2-1}} du$. On reconnaît la dérivée de l'arccosinus hyperbolique et il vient donc $\int_0^\pi \int_a^b g(u, t) du dt = \int_a^b \frac{\pi}{\sqrt{u^2-1}} du = \pi [\operatorname{arccch}(u)]_a^b = \pi \left[\ln(u + \sqrt{u^2-1}) \right]_a^b = \pi \ln \left(\frac{a + \sqrt{a^2-1}}{b + \sqrt{b^2-1}} \right)$. \square

(16) (***) Calculer le volume d'une boule de rayon $r > 0$ dans \mathbb{R}^3 .

Proof: Soit I ce volume. On a $I = \iiint_B dx dy dz$, où $B = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, x^2 + y^2 + z^2 \leq r^2\}$. On passe en coordonnées sphériques en effectuant le changement de variables $x = u \sin(\theta)$, $y = u \sin(\theta) \cos(\alpha)$ et $z = u \sin(\theta) \sin(\alpha)$ avec $-r \leq u \leq r$, $\theta \in [0, \pi]$ et $\alpha \in [0, \pi]$. Le déterminant du Jacobien de ce changement de variables est $u^2 \sin(\theta)$. Il vient donc $I = \int_0^\pi \int_0^\pi \int_{-r}^r u^2 \sin(\theta) du d\theta d\alpha = 2\pi \left(\frac{2}{3}r^3\right) = \frac{4}{3}\pi r^3$. \square