Université Paris I, Panthéon - Sorbonne

LICENCE M.I.A.S.H.S. PREMIÈRE ANNÉE 2018 – 2019

Feuilles de TD, cours de L1 Probabilités

JEAN-MARC BARDET (UNIVERSITÉ PARIS 1, SAMM)

Email: `bardet@univ-paris1.fr`
Page oueb: `http://samm.univ-paris1.fr/-Jean-Marc-Bardet-`

U.F.R. 27 et Equipe SAMM (Statistique, Analyse et Modélisation Multidisiplinaire)
Université Panthéon-Sorbonne, 90 rue de Tolbiac, 75013 Paris.

Feuille n^o 1:

Un peu de statistiques descriptives

1. **(*)** On considère les longueurs de 100 oeufs de coucous (en mm):

22.5	20.1	23.3	22.9	23.1	22.0	22.3	23.6	24.7	23.7
24.0	20.4	21.3	22.0	24.2	21.7	21.0	20.1	21.9	21.9
21.7	22.6	20.9	21.6	22.2	22.5	22.2	24.3	22.3	22.6
20.1	22.0	22.8	22.0	22.4	22.3	20.6	22.1	21.9	23.0
22.0	22.0	22.1	22.0	19.6	22.8	22.0	23.4	23.8	23.3
22.5	22.3	21.9	22.0	21.7	23.3	22.2	22.3	22.8	22.9
23.7	22.0	21.9	22.2	24.4	22.7	23.3	24.0	23.6	22.1
21.8	21.1	23.4	23.8	23.3	24.0	23.5	23.2	24.0	22.4
23.9	22.0	23.9	20.9	23.8	25.0	24.0	21.7	23.8	22.8
23.1	23.1	23.5	23.0	23.0	21.8	23.0	23.3	22.4	22.4

- Construire un tableau de fréquences pour des classes de longueur 0.5 mm. Illustrer graphiquement les données à l'aide d'un histogramme, puis d'un polygone des fréquences cumulées. En déduire la médiane.
- Calculer la moyenne et l'écart-type à partir des 100 données, puis à partir des données par classes.

2. **(*)** Les salaires hebdomadaires (en dollars) d'un échantillon de femmes d'une même entreprise en 2014 étaient:

Salaires hebdomadaires (Dollars)	Nombre de femmes
moins de 150	1
entre 150 et 200	4
entre 200 et 250	28
entre 250 et 300	42
entre 300 et 350	33
entre 350 et 400	18
entre 400 et 450	13
entre 450 et 600	9
600 et plus	2

(a) Représenter par un histogramme la répartition des salaires. Construire le polygône des fréquences cumulées et en déduire la médiane et les quantiles à 10% et 90% de cette distribution. Quel est le ratio entre ces deux quantiles (mesure de la répartition des salaires)?

(b) Calculer la moyenne et l'écart type de cette distribution.

(c) Que se passe t-il pour la médiane, la moyenne et l'écart-type si chaque femme est augmentée de 50 dollars par semaine? Est augmentée de 10%?

3. **(*)** On a demandé à 1000 étudiants et à 1500 étudiantes la couleur de leurs yeux:

Couleur des yeux	Nombre d'étudiants	Nombre d'étudiantes
Bleu	420	650
Vert	120	150
Marron	450	680
Divers	10	20

Représenter sur un même graphe les deux diagrammes à bâtons des fréquences. Peut-on conclure que les hommes ont des yeux de couleur différente de ceux des femmes?

4. **(*)** 60 % de la population gagne moins que le salaire moyen a dit un politicien. Est-ce posssible? Illustrer votre réponse.

5. **(*)** Calculer la moyenne et l'écart type du nombre de lettres dans les mots de cette phrase.

6. **(*)** Un ensemble d'observations a pour moyenne 20 et pour écart type 4. Quel est l'effet sur la moyenne et sur l'écart type de:
   - On ajoute 3 à toutes les observations.
   - On multiplie toutes les observations par 10.
   - On soustrait 12 à toutes les observations, puis on les divise par 2.

7. **(**)** (Paradoxe de Simpson) Dans l'état de Floride en 1974, on a décompté les condamnations prononcées pour meurtres. Comme aux USA les statistiques ethniques sont autorisées, on a réparti celles-ci en fonction de la couleur de peau et on obtient les résultats suivants:
   - Parmi les "'blancs"' meurtriers, 72 ont été condamnés à mort et 2185 ont été condamnés à une autre peine;
   - Parmi les "'noirs"' meurtriers, 59 ont été condamnés à mort et 2448 ont été condamnés à une autre peine.

   (a) Quelles sont les fréquences de verdict de condamnation à mort suivant la couleur de peau du meurtrier? Quelle population vous semblent être privilégiée?

   (b) On peut rendre un peu plus précis ces résultats en distinguant la couleur de peau de la victime. Ainsi lorsque la victime était blanche, les meurtriers blancs ont écopé 72 fois de la peine de mort et 2074 fois d'une autre peine et les meurtriers noirs ont écopés 48 fois de la peine de mort et 239 fois d'une autre peine. En déduire les résultats lorsque la victime était noire (on pourra notamment utiliser des dessins d'ensembles). Qu'en déduisez vous finalement quant à la justice en Floride? (on dira que la couleur de peau de la victime est une variable de confusion)

Feuille n^o 2:

Espace de probabilité et événements

1. **(*)** On constate qu'en France il y une personne sur 6 qui possède un ordinateur personnel et une personne sur 25 qui est chauve. On constate aussi que une personne sur 75 est chauve et possède un ordinateur personnel. Quel est le pourcentage de Français chevelus? De Français chauves sans ordinateur? De Français chevelus avec ordinateur? De Français chevelus sans ordinateur?

2. **(*)** En informatique, on utilise le système binaire pour coder les caractères. Un bit (binary digit : chiffre binaire) est un élément qui prend la valeur 0 ou la valeur 1. Avec 8 chiffres binaires (un octet), combien de caractères peut-on coder?

3. **(*)** Soit A l'ensemble des nombres de quatre chiffres, le premier étant non nul. 1) Calculer le nombre d'éléments de A. 2) Dénombrer les éléments de A:
   a) composés de quatre chiffres distincts;
   b) composés d'au moins deux chiffres identiques;
   c) composés de quatre chiffres distincts autres que 5 et 7.

4. **(**)** Au Scrabble, on a un tirage avec 7 lettres distinctes. Combien de mots de 7 lettres peut-on constituer au maximum à partir de ce tirage? Combien de mots de 3 lettres? Répondre aux mêmes questions si deux des lettres (et uniquement 2) du tirage initial sont identiques?

5. **(*)** On choisit une carte au hasard dans un jeu de 52 cartes. Quelle est la probabilité que ce soit une dame (décrire l'ensemble fondamental, la tribu associée et la probabilité considérée) ? On en choisit deux. Quelle est la probabilité que ce soit deux dames (décrire l'ensemble fondamental, la tribu associée et la probabilité considérée)?

6. **(**)** On demande à 5 personnes d'écrire leur nom sur un papier, puis on mélange les papiers et on les redistribue au hasard. Quelle est la probabilité qu'au moins une personne ait le papier avec son nom? Que tous aient le papier avec leur nom?

7. **(**)** On constitue un groupe de 6 personnes choisies au hasard parmi 25 femmes et 32 hommes.
   1) De combien de façons peut-on constituer ce groupe de 6 personnes?
   2) Dans chacun des cas suivants, quelle est la probabilité d'obtenir pour ces 6 personnes: a) uniquement des hommes; b) des personnes de même sexe; c) au moins une femme et au moins un homme.

8. **(***)** Dans une assemblée de n personnes, à partir de quelle valeur de n a-t-on au moins une chance sur deux que deux personnes soient nées le même jour? Préciser les hypothèses faites...

Feuille n^o 3:

Probabilités conditionnelles et indépendance

1. **(*)** On considère une population composée de 48% d'hommes et de 52% de femmes. La probabilité qu'un homme soit daltonien est de 0.05, qu'une femme soit daltonienne 0.0025. Quelle proportion de la population est daltonienne?

2. **(*)** Trouver la probabilité pour que dans une famille de quatre enfants on ait: (a) au moins un garçon, (b) au moins un garçon et une fille. On suppose que la probabilité de la naissance d'un garçon est de 0.51.

3. **(*)** On choisit une carte au hasard dans un jeu de 52 cartes. Quelle est la probabilité que ce soit une dame (décrire l'ensemble fondamental, la tribu associée et la probabilité considérée)? On en choisit deux. Quelle est la probabilité que ce soit deux dames (décrire l'ensemble fondamental, la tribu associée et la probabilité considérée)?

4. **(*)** On a lancé 10 fois une pièce non biaisée et l'on a obtenu 10 fois pile. Quelle était la probabilité d'un tel tirage? On lance une onzième fois la pièce. Quelle est la probabilité d'avoir pile sachant que les dix lancés précédents étaient des piles? Quelle est la probabilité que le onzième lancé soit pile?

5. **(*)** On effectue le dépistage systématique sur une population donnée d'une maladie qui affecte en général 15% des individus. On réalise un test qui donne 95% de résultats positifs pour les personnes malades et 10% de résultats positifs parmi les non malades. Quelle est la probabilité qu'une personne prise au hasard soit malade sachant que le test a donné un résultat positif? soit non malade sachant que le test a donné un résultat négatif?

6. **(**)** Deux joueurs d'échecs effectuent un match en trois parties. Lorsque ces deux joueurs se rencontrent on sait en général que A gagne une fois sur 4, que B gagne une fois sur 3 et que le reste du temps il y a nul. Sachant que l'on sait après le tournoi que c'est le même joueur qui a gagné les trois parties, quelle est la probabilité que ce soit A?

7. **(**)** On estime que le gérant d'un portefeuille boursier bien informé a, pour une action donnée achetée, une probabilité égale à 4/5 de voir l'action monter. On estime aussi qu'un gérant mal informé a une probabilité égale à 1/2 de voir l'action baisser. On estime aussi que 30% des gérants de portefeuilles boursiers sont bien informés, les autres ne l'étant pas. Un gérant donné achète 5 actions indépendantes les unes des autres. 3 montent et 2 baissent. Quelle est la probabilité qu'il soit bien informé?

8. **(***)** On connait approximativement les données suivantes: deux gauchers qui ont un enfant voit celui-ci avoir une chance sur deux d'être gaucher, qui devient une chance sur cinq si un parent est gaucher et l'autre droitier, qui devient une chance sur dix si les deux parents sont droitiers. Quelle est la proportion de gauchers dans la population totale?

Feuille n^o 4:
Variables aléatoires

1. **(*)** On considère 4 lettres et les 4 enveloppes correspondantes. On met au hasard les 4 lettres dans les enveloppes et on définit la variable aléatoire X comme le nombre de lettres qui atteindront leur destinataire. Donner la loi de X, son espérance et sa variance.

2. **(*)** Trouver la probabilité d'obtenir 200 fois 1 en lançant 1000 fois un dé honnête.

3. **(*)** On considère 8 hommes et 8 femmes, dont on extrait par tirage au sort un groupe de 8 personnes. On note N la variable aléatoire égale au nombre de femmes du groupe. Calculer la probabilité $P(3 \leq N \leq 5)$. Donner la loi de probabilité de N, son espérance et sa variance.

4. **(*)** On lance n fois une pièce parfaitement équilibrée. Quelle est la probabilité d'obtenir strictement plus de piles que de faces.

5. **(**)** On dispose de n urnes numérotées de 1 à n, l'urne numérotée k comprenant k boules numérotées de 1 à k. On choisit d'abord uniformément une urne, puis uniformément une boule dans cette urne, et on note Y la variable aléatoire du numéro obtenu. Quelle est la loi de Y? Son espérance?

6. **(**)** On suppose la variable aléatoire X à valeurs dans $\mathbb{N}^*$, telle que $\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad P(X = n) = a\dfrac{1}{n(n+1)}$. Déterminer c_1 et c_2 tels que $\dfrac{1}{n(n+1)} = \dfrac{c_1}{n+1} + \dfrac{c_2}{n}$ pour tout $n \in \mathbf{N}^*$. En déduire a pour que la loi de X soit bien une loi de probabilité. Quelle est l'espérance de X?

7. **(***)** On suppose que le nombre de connections par jour sur un serveur internet est N, variable aléatoire, telle que $\forall n \in \mathbb{N}, \quad P(N = k) = a\dfrac{\lambda^{2n+1}}{2n+1}$, avec $\lambda \in]0, 1[$. Déterminer a pour que l'on ait bien une loi de probabilité (utiliser les séries entières). Calculer $P(0 \leq N \leq 2)$ et la probabilité qu'il y ait eu plus d'une connection dans la journée. Calculer l'espérance et la variance de N.

8. **(***)** Soit l'espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ où $\Omega = [0, 1]$, $\mathcal{A}$ la tribu borélienne sur Ω et $\mathbb{P}$ la probabilité uniforme sur $[0, 1]$.
   (a) On pose X la variable aléatoire telle que $X(\omega) = 1 - \omega$ pour tout $\omega \in \Omega$. Déterminer la loi de probabilité de X, son espérance et sa variance. Quelle loi obtient-on?
   (b) Répondre aux mêmes questions pour $Y(\omega) = -\ln(\omega)$.
   (c) On pose $Z(\omega) = \omega$ pour $\omega \in [0.5, 1]$ et $Z(\omega) = 0$ pour $\omega \in [0, 0.5[$. Déterminer la fonction de répartition de Z.

9. **(*)** On considère une variable aléatoire X qui suit une loi exponentielle de paramètre λ. Calculer la médiane m de la loi, c'est-à-dire le nombre m tel que $P(X \leq m) = 0.5$.

10. **(*)** On suppose qu'avec une balance, l'erreur sur la pesée d'un corps est une variable aléatoire normale $\mathcal{N}(0; (0.08)^2)$. Soit X la variable aléatoire égale au résultat de la pesée d'un corps de masse exacte 72.37 g. Calculer la probabilité $P(72.3 \leq X < 72.5)$. Déterminer un intervalle I tel que $P(X \in I) = 0.98$.

11. **(*)** On suppose la variable aléatoire X à valeurs dans $[1, +\infty[$, telle que $\forall x \in [1, +\infty[, \quad f(x) = a/x^3$. Déterminer a pour que l'on ait bien une loi de probabilité. Calculer l'espérance et la variance de X.

12. **(**)** On suppose que le temps d'attente (en mn) à une station service est une variable aléatoire T telle que $\forall t \geq 0, \quad P(T > t) = a(t^2+1)\exp(-2t)$. Déterminer a pour que l'on ait bien une loi de probabilité. Calculer $P(1 \leq T \leq 2)$ et la probabilité de mettre moins de 3 mn pour être servi. Déterminer la densité de probabilité de T, et calculer son espérance et sa variance.

13. **(*)** La charge de rupture d'un ascenseur est $500kg$. Un individu pris au hasard parmi les utilisateurs de cet ascenseur a un poids représenté par une variable aléatoire de loi $\mathcal{N}(m, \sigma^2)$ avec $m = 75kg$ et $\sigma = 16kg$. Quel est le nombre maximal de personnes que l'on peut autoriser à monter simultanément dans l'ascenseur pour que le risque de surcharge soit inférieur à 10^{-6}?

14. **(*)** La durée de vie d'un composant électrique peut être représenté par une variable aléatoire réelle X de densité de probabilité f définie par $f(x) = \begin{cases} kx(5-x) & \text{si } 0 \leq x \leq 5 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

    (a) Calculer la valeur de k. Représenter graphiquement la fonction de répartition F_X de X

    (b) Calculer l'espérance et l'écart-type de X. Déterminer la médiane de X, c'est-à-dire le réel m tel que $P(X \leq m) = 0.5$.

Feuille n^o 5:

Variables aléatoires indépendantes et fonctions d'une variable aléatoire

1. **(*)** Un supermarché comporte 50 caisses. Pour chaque caisse, le nombre declients en attente suit une loi de Poisson de moyenne 5. Déterminer la probabilité que l'on ait au plus 300 personnes qui attendent dans tout le supermarché. Le supermarché veut construire d'autres caisses. Combien en faut-il au minimum pour avoir 95% de chance qu'il y ait moins de 300 personnes en attente?

2. **(**)** On suppose 1000 piles produites par une même usine, telles que chaque pile a, indépendamment des autres, une probabilité 0.04 d'être défectueuse. On note N le nombre de piles défectueuses parmi les 1000.

   (a) Déterminer la loi de N, calculer son espérance m et sa variance σ^2, puis les probabilités $P(N < 5)$ et $P(N > 100)$.

   (b) On modélise autrement N par une loi de Poisson de même espérance que précedemment (donc m). Calculer alors la variance de N puis les deux probabilités précédentes.

   (c) On modélise enfin N par une loi normale de moyenne m et de variance σ^2. Calculer alors les deux probabilités $P(N < 5)$ et $P(N > 100)$.

3. **(*)** Une fabrication de fusibles comporte habituellement 2% de fusibles défectueux. Quelle est la probabilité d'observer deux fusibles défectueux a/ dans un échantillon de taille $n = 30$? b/ dans un échantillon de taille $n = 100$? c/ dans un échantillon de taille $n = 500$? Pour chaque taille d'échantillon, combien de fusibles défectueux peut-on s'attendre à observer en moyenne? Quelle est la probabilité d'observer au plus deux fusibles défectueux dans les cas a/, b/, c/?

4. **(*)** On sait que 3% des réservations de places d'avions ne sont pas honorées le jour du départ. Pour un avion de 400 places, combien de réservations au maximum peuvent-elles être acceptées par une compagnie aérienne pour que la probabilité que des personnes ayant réservé n'ait pas de place le jour du départ soit inférieure à 5%?

Feuille n^o 6:

Suites de variables aléatoires et théorèmes limites

1. **(*)**