Université Paris I, Panthéon - Sorbonne

Licence M.A.S.S.

Cours d'Analyse S4

Jean-Marc Bardet (Université Paris 1, SAMM)

U.F.R. 27 et Equipe SAMM (Statistique, Analyse et Modélisation Multidisiplinaire)
Université Panthéon-Sorbonne, 90 rue de Tolbiac, 75013 Paris.

Plan du cours

1. Intégrales généralisées.
2. Intégrales multiples.
3. Intégrales dépendant d'un paramètre.
4. Equations différentielles linéaires.
5. Séries entières.

Bibliographie

Livres pour commencer...

- Archinard G. et Guerrien, B. *Analyse pour économistes.* Economica.
- Chauvat G., Chollet A. et Bouteiller Y. *Mathématiques - BTS/DUT industriel - Analyse*, Ediscience .
- Piller, A. *Analyse II pour économistes - Manuel d'exercices corrigés avec rappels de cours.* Premium.

Livres de niveau plus élevé

- *Mathématiques L2.* Pearson Education.
- Liret F. et Martinais D. *Mathématiques à l'université - Analyse - 2e année - Cours et exercices avec solutions.* Licence 2e année MIAS, MASS et SM. Dunod
- Monier, J.-M. *Analyse MPSI - Cours, méthodes, exercices corrigés.* Dunod.
- Ramis, E., Deschamps, C. et Odoux, J. *Cours de mathématiques, tome 4: Séries et équations différentielles.* Dunod.
- Ramis, J.P. et Warusfel, A. *Mathématiques Tout-en-un pour la Licence, Niveau L2 : Cours complets avec applications et 760 exercices corrigés.* Dunod.

Rappels

0.1 Suites et séries de fonctions

0.1.1 Suites de fonctions

Définition.
- *Suite de fonctions.*
- *Convergence simple.*
- *Convergence uniforme.*

Propriété. *(Convergence uniforme)* $\Longrightarrow$ *(Convergence simple)*

Remarque.

La réciproque est fausse (contrexemple: $f_n(x) = x^n$ sur $[0, 1]$).

Théorème. Théorème de continuité *Si (f_n) est une suite de fonctions continues sur A, qui converge uniformément vers f sur A, alors f continue sur A.*

Remarque.

La continuité étant locale, f est continue en x_0 si les f_n sont continues et convergent uniformément sur un intervalle contenant x_0.

Théorème. Théorème d'intégration *Si (f_n) est une suite de fonctions continues sur $[a, b]$, qui converge uniformément vers f sur $[a, b]$, alors:*

$$\lim_{n\to+\infty} \int_a^b f_n(x)dx = \int_a^b \lim_{n\to+\infty} f_n(x)dx = \int_a^b f(x)dx$$

Théorème. Théorème de dérivation *Si (f_n) est une suite de fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a, b]$ et si:*
- *Il existe $x_0 \in [a, b]$ tel que $(f_n(x_0))$ converge simplement,*
- *Les (f'_n) converge uniformément vers une fonction g sur $[a, b]$,*

alors (f_n) converge simplement vers f sur $[a, b]$, f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a, b]$ telle que $f' = g$ soit $(\lim_{n\to+\infty} f_n)'(x) = \lim_{n\to+\infty} f'_n(x)$.

0.1.2 Séries de fonctions

Définition.
- *Série de fonctions.*
- *Convergence simple.*
- *Convergence uniforme.*
- *Convergence normale.*

Propriété. *(Convergence normale)* $\Longrightarrow$ *(Convergence uniforme)* $\Longrightarrow$ *(Convergence simple)*

Remarque.

La réciproque est fausse.

Propriété. *Si $\forall x \in A$, $|f_n(x)| \leq u_n$ et $\sum u_n$ converge alors $\sum f_n(x)$ converge normalement sur A.*

Théorème. Théorème de continuité *Si (f_n) est une suite de fonctions continues sur A et si $\sum f_n(x)$ convergent uniformément vers $S(x)$ sur A, alors S continue sur A.*

Théorème. Théorème d'intégration *Si (f_n) est une suite de fonctions continues sur $[a, b]$ et si $\sum f_n(x)$ convergent uniformément vers $S(x)$ sur $[a, b]$, alors:*

$$\int_a^b \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x)dx = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_a^b f_n(x)dx$$

Théorème. Théorème de dérivation *Si (f_n) est une suite de fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a, b]$ et si:*
- *Il existe $x_0 \in [a, b]$ tel que $\sum f_n(x_0)$ converge,*
- *La suite $\left(\sum f'_n\right)$ converge uniformément sur $[a, b]$,*

alors $\sum f_n$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a, b]$ et pour $x \in [a, b]$, $\displaystyle\left(\sum_{n=0}^{+\infty} f_n\right)'(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} f'_n(x)$.

1 Intégrales généralisées (impropres)

On s'intéresse à des intégrales dont les bornes comprennent soit $\pm\infty$, soit des points où la fonction à intégrer n'est pas définie.

1.1 Convergence d'une intégrale généralisée

Définition. *Soit $f : I \mapsto \mathbb{R}$ une fonction. On dit que f est une fonction localement intégrable sur I si pour tout intervalle $[\alpha, \beta] \subset I$, $\int_\alpha^\beta f(t)dt$ existe.*

Définition. *Soit $f : [a, b[\mapsto \mathbb{R}$ une fonction localement intégrable sur $[a, b[$ (b pouvant être $+\infty$). On dit que l'intégrale dite généralisée (ou impropre) $\int_a^b f(t)dt$ est convergente si $\lim_{x\to b} \int_a^x f(t)dt$ existe. On posera alors $\int_a^b f(t)dt = \lim_{x\to b} \int_a^x f(t)dt$. Sinon, on dira que l'intégrale est divergente.*

Remarque.

Pour simplifier l'écriture, ici on ne considère qu'un "point" problématique pour l'intégrale, à savoir b, ce qui arrive notamment lorsque $b = +\infty$ ou si f n'a pas de limite en b avec b fini. Il peut cependant y avoir d'autres points problématiques, en a par exemple. Par exemple, $\int_0^1 \frac{1}{1-x}dx$ et $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-|x|}dx$ sont des intégrales impropres (la première diverge la seconde converge...).

Théorème. Critère de convergence de Cauchy *Si f localement intégrable sur $[a, b[$ (b pouvant être ∞), alors: $\displaystyle\int_a^b f(t)dt$ converge si et seulement si $\forall\varepsilon > 0$, $\exists c \in [a, b[$ tel que $\forall(x, x') \in [c, b[^2$, $\displaystyle\left|\int_x^{x'} f(t)dt\right| \leq \varepsilon$.*

Conséquence.

Si f localement intégrable sur $[a, b[$ alors si $\displaystyle\int_a^b |f(t)|dt$ converge alors $\displaystyle\int_a^b f(t)dt$ converge.

Remarque.

La réciproque est fausse.

Définition. *Pour f localement intégrable sur $[a, b[$ on dit que*

- *$\int_a^b f(t)dt$ est une intégrale absolument convergente si $\int_a^b |f(t)|dt < \infty$.*
- *$\int_a^b f(t)dt$ est une intégrale semi-convergente si $\int_a^b |f(t)|dt = \infty$ mais $\int_a^b f(t)dt$ existe.*

Théorème. Théorèmes de comparaison *Soient f et g localement intégrables sur $[a, b[$.*

- *Si $f \sim g$ en b, alors $\displaystyle(\int_a^b f(t)dt$ absolument convergente$) \iff (\displaystyle\int_a^b g(t)dt$ absolument convergente$)$ (**faux avec semi-convergence**);*
- *Si $0 \leq f \leq g$ sur $[a, b[$, alors $\displaystyle(\int_a^b g(t)dt$ convergente$) \Longrightarrow (\displaystyle\int_a^b f(t)dt$ convergente$)$;*
- *Si $0 \leq f \leq g$ sur $[a, b[$, alors $\displaystyle(\int_a^b f(t)dt$ divergente$) \Longrightarrow (\displaystyle\int_a^b g(t)dt$ divergente$)$.*

Conséquence.

Si f est localement intégrable sur $[a, b[$ avec $b < +\infty$, et si $\lim\limits_{x\to b} f(x)$ existe alors f est prolongeable par continuité en b et $\displaystyle\int_a^b f(t)dt$ converge.

Conséquence.

Si f est localement intégrable sur $[a, +\infty[$ tel que $\lim_{x\to+\infty} f(x) \neq 0$ alors $\int_a^{+\infty} f(t)dt$ diverge.

Remarque.

$\int_a^{+\infty} f(t)dt$ peut converger même si f est non bornée en $+\infty$. En ceci l'étude de la convergence des intégrales impropres diffère de celle des séries...

Il est souvent possible de se ramener par un théorème de comparaison à l'étude des intégrales de Riemann. En particulier, on doit savoir que:

$$\int_0^1 \frac{dx}{x^\alpha} \text{ converge dès que } \alpha < 1 \text{ et } \int_1^\infty \frac{dx}{x^\alpha} \text{ converge dès que } \alpha > 1.$$

1.2 Calcul des intégrales généralisées

Propriété. *Si f et g sont localement intégrables sur $[a, b[$ et si $\int_a^b f(t)dt$ et $\int_a^b g(t)dt$ convergent alors :*

1. *Pour $\lambda \in \mathbb{R}$, $\int_a^b \lambda\, f(t)dt = \lambda \int_a^b f(t)dt$.*
2. *Si $\int_a^b g(t)dt$ est absolument convergente, $\int_a^b (f(t) + g(t))dt = \int_a^b f(t)dt + \int_a^b g(t)dt$.*
3. *$\int_a^c f(t)dt = \int_a^b f(t)dt + \int_b^c f(t)dt$ et $\int_b^a f(t)dt = -\int_a^b f(t)dt$ (Chasles).*
4. *Si $f \geq g$ sur $[a, b]$ alors $\int_a^b f(t)dt \geq \int_a^b g(t)dt$.*
5. *Si $\int_a^b f(t)dt$ est absolument convergente, $\left|\int_a^b f(t)dt\right| \leq \int_a^b |f(t)|dt$.*

Les méthodes de calcul utilisées pour les intégrales définies peuvent être reprises en rajoutant certaines conditions. On suppose que f est localement intégrables sur $[a, b[$ et que $\int_a^b f(t)dt$ converge :

1. Utilisation d'une primitive: $\int_a^b f(t)dt = \lim_{x\to b} F(x) - F(a)$.
2. Intégration par parties: on a $\int_a^b u(t)\, v'(t)\, dt = \lim_{x\to b} \big[u(t)\, v(t)\big]_a^x - \int_a^b u'(t)\, v(t)dt$ si $\lim_{x\to b} \big[u(t)\, v(t)\big]_a^x$ et $\int_a^b u'(t)\, v(t)dt$ existent.
3. Changement de variable: $\int_a^b f(x)dx = \int_{\phi^{-1}(a)}^{\lim_{x\to b} \phi^{-1}(x)} \phi'(t)\, f(\phi(t))dt$ où ϕ est une bijection strictement monotone de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[\phi^{-1}(a), \lim_{x\to b} \phi^{-1}(x)[$.

2 Intégrales multiples

On s'intéresse ici à une fonction $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, à un ensemble $\Delta \subset \mathbb{R}^n$ sur lequel f est continue par morceaux et à l'intégrale (lorsqu'elle existe)

$$\int_\Delta f(x)dx = \iint .. \int_\Delta f(x_1, \cdots, x_n)dx_1 \cdots dx_n.$$

2.1 Domaine mesurable et volume d'un pavé

Dans l'écriture d'une intégrale multiple ci-dessus on peut se demander quelle forme peut prendre l'ensemble Δ pour que l'on puisse calculer l'intégrale. Dans $\mathbb{R}$, on a l'habitude de travailler avec des intervalles ou des unions d'intervalles (ouverts ou fermés). Dans $\mathbb{R}^n$, on peut imaginer différents types d'ensembles: des rectangles, des parallélépipèdes, des boules,... Mais pour quel type d'ensemble peut-on considérer une intégrale multiple?

Définition. *On appelle pavé P de $\mathbb{R}^n$ un ensemble de la forme $P = I_1 \times \cdots \times I_n$, où $I_1, \cdots, I_n$ sont des intervalles de $\mathbb{R}$. Si les I_k sont des intervalles ouverts (respectivement fermés) alors P est un pavé ouvert (respectivement fermé).*

Exemple.

Dans R, R^2,...

Définition. *On dit qu'un ensemble Δ de $\mathbb{R}^n$ est mesurable (en toute rigueur Lebesgue-mesurable) s'il peut s'écrire comme une union ou une intersection dénombrable de pavés de $\mathbb{R}^n$, c'est-à-dire s'il existe une suite $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de pavés de $\mathbb{R}^n$ tels que $\Delta = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} P_n$ ou $\Delta = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} P_n$.*

Exemple.

Montrer qu'un triangle est bien un ensemble mesurable de $\mathbb{R}^2$.

Définition. *On dit qu'une fonction $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ est mesurable (en toute rigueur Lebesgue-mesurable) si pour tout ensemble mesurable $A_m \subset \mathbb{R}^m$, $f^{-1}(A_m) = \{x \in \mathbb{R}^n,\ f(x) \in A_m\}$ est un ensemble mesurable de $\mathbb{R}^n$.*

Exemple.

Pour A mesurable sur $\mathbb{R}^n$, $f = \mathbb{I}_A$ est mesurable. De même pour f une fonction continue, ou continue par morceaux de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^n$.

Propriété. *Une fonction mesurable de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$ peut toujours s'écrire sous la forme $f = \sum_{i\in I} a_i \mathbb{I}_{P_i}$ où les a_i sont des réels, les P_i sont des pavés disjoints de $\mathbb{R}^n$ et $I \subset N$.*

Propriété. *Si $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ est mesurable (par exemple si f est continue par morceaux) et A_m est un ensemble mesurable de $\mathbb{R}^m$, alors l'ensemble $f^{-1}(A_m)$ est un ensemble mesurable de $\mathbb{R}^n$.*

Exemple.

Montrer qu'un disque est bien un ensemble mesurable de $\mathbb{R}^2$.

Remarque.

En fait, même s'il existe une infinité d'ensembles non mesurables dans $\mathbb{R}^n$ (l'ensemble des ensembles non mesurables est même infiniment "plus grand" que celui des ensembles mesurables), il n'est pas facile d'en construire un. Tous les ensembles auxquels on peut penser habituellement (boules, cylindres, cônes,...) sont eux mesurables.

2.2 Définition générale d'une intégrale multiple

On commence par définir une intégrale multiple à partir du volume d'un pavé:

Définition. *Pour $P = [a_1, b_1] \times \cdots \times [a_n, b_n]$ un pavé de $\mathbb{R}^n$ tel que $-\infty < a_i < b_i < \infty$ (on peut aussi prendre les intervalles ouverts, ou bien ouverts d'un seul côté...), on définit le volume de ce pavé par*

$$\int_P dx = \int_{\mathbb{R}^n} \mathbb{I}_P(x)dx = \prod_{i=1}^n (b_i - a_i).$$

Ceci permet de définir d'une nouvelle manière une intégrale (dite de Lebesgue) sur $\mathbb{R}^n$:

Définition. *Pour $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}_+$ une fonction mesurable telle que $f = \sum_{i \in I} a_i \mathbb{I}_{P_i}$ où les a_i sont des réels positifs, P_i sont des pavés disjoints de $\mathbb{R}^n$ et $I \subset \mathbb{N}$, alors on peut toujours définir l'intégrale de f par:*

$$\int_{\mathbb{R}} f(x)dx = \sum_{i \in I} \alpha_i \Big(\int_{P_i} dx \Big) \quad \text{(pouvant prendre la valeur } +\infty\text{)}.$$

Définition. *Pour $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ une fonction mesurable (non nécessairement positive) telle que $\int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|dx < \infty$, on peut poser $f = f_+ - f_-$, où $f_+ = \max(0, f)$ et $f_- = \max(-f, 0)$ sont deux fonctions mesurables positives, et ainsi*

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(x)dx = \int_{\mathbb{R}^n} f_+(x)dx - \int_{\mathbb{R}^n} f_-(x)dx.$$

Si Δ est un ensemble mesurable de $\mathbb{R}^n$, on notera $\int_\Delta f(x)dx = \int_{\mathbb{R}^n} \mathbb{I}_\Delta(x) f(x)dx$.

Propriété. *Il est facile de voir à partir d'une telle définition qu'une intégrale est une forme linéaire d'un ensemble de fonctions dans $\mathbb{R}$, car "stable" par l'addition ou par la multiplication par une constante. En particulier, on voit facilement ici qu'une fonction continue sur $\mathbb{R}^n$ est toujours intégrable sur un pavé fermé.*

On retrouve aussi avec cette notion d'intégrale des propriétés connues pour l'intégrale de Riemann:

Propriété. *Soit $f : \mathbb{R}^n \to R$ une fonction intégrable sur Δ domaine mesurable de $\mathbb{R}^n$. Alors:*

1. *Si $\Delta = \Delta_1 \cup \Delta_2$ avec Δ_1 et Δ_2 deux ensembles mesurables disjoints de $\mathbb{R}^n$, alors $\int_\Delta f(x)dx = \int_{\Delta_1} f(x)dx + \int_{\Delta_2} f(x)dx$ (Relation de Chasles).*
2. *Si $f \leq g$ avec $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ une fonction intégrable sur Δ alors $\int_\Delta f(x)dx \leq \int_\Delta g(x)dx$.*

On peut aussi étendre cette notion d'intégrale à des intégrales semi-convergentes:

Définition. *Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ une fonction mesurable et Δ un ensemble mesurable de $\mathbb{R}^n$. On suppose qu'il existe $(\Delta_i)_{i \in \mathbb{N}}$ une suite croissante (au sens de l'inclusion: $\Delta_i \subset \Delta_{i+1}$ pour tout $i \in \mathbb{N}$) d'ensembles mesurables de $\mathbb{R}^n$, telle que $\Delta = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} \Delta_i$ et $\lim_{i \to \infty} \int_{\Delta_i} f(x)dx < \infty$. Alors on peut définir l'intégrale de f sur Δ et*

$$\int_\Delta f(x)dx = \lim_{i \to \infty} \int_{\Delta_i} f(x)dx.$$

Si $\int_\Delta |f(x)|dx = \infty$, on dira alors que l'intégrale de f sur Δ est semi-convergente (mais f ne sera pas intégrable au sens de Lebesgue).

Exemple.

On pourra ainsi considérer les intégrales $\int_0^n \int_0^n f(x,y)dxdy$ pour montrer la convergence de $\int_0^\infty \int_0^\infty f(x,y)dxdy$.

Attention à la relation de Chasles pour les intégrales multiples! Ainsi $\int_0^{n+1} \int_0^{n+1} \neq \int_0^n \int_0^n + \int_n^{n+1} \int_n^{n+1}$ en général, mais (faire un dessin pour s'en convaincre)

$$\int_0^{n+1} \int_0^{n+1} = \int_0^n \int_0^n + \int_n^{n+1} \int_0^n + \int_0^n \int_n^{n+1} + \int_n^{n+1} \int_n^{n+1}.$$

Remarque.

Si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est Riemann-integrable sur $\Delta \subset \mathbb{R}$ (ce peut être une intégrale généralisée) alors les définitions ci-dessus permettent de retrouver la valeur de $\int_\Delta f(x)dx$ calculée usuellement (à partir de la notion d'intégrale de Riemann). L'intérêt de la notion d'intégrale de Lebesgue définie ci-dessus est qu'elle permet de définir des intégrales pour des fonctions plus générales que des fonctions Riemann-intégrables. Par exemple $\int_0^1 \mathbb{I}_{\mathbb{Q}}(x)dx$ est désormais définie et calculable (et vaut 0).

2.3 Calcul d'une intégrale multiple

Les définitions ci-dessus permettent de définir mais pas forcément de calculer une intégrale multiple. Un résultat très puissant (Théorème de Fubini) qui permet de revenir à des intégrales "simples" et une généralisation du changement de variable à plusieurs dimensions peuvent permettre de calculer une intégrale multiple (mais ce n'est évidemment pas toujours possible; rappelons par exemple que $\int_0^x e^{-t^2/2}dt$ n'est pas exprimable, mais existe et peut être approchée par des méthodes numériques...).
Remarquons que dans le cas d'intégrales multiples le recours à une primitive n'est pas possible directement (qu'est-ce qu'une primitive d'une fonction à deux variables par exemple?), mais il pourra tout de même être utilisé si l'on peut décomposer l'intégrale multiple en intégrales simples.

Théorème (Théorème de Fubini-Tonelli pour les fonctions positives)**.** *Si $f : \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}_+$ est mesurable et positive, alors les applications $x \in \mathbb{R}^m \mapsto \int_{\mathbb{R}^n} f(x,y)dy$ et $y \in \mathbb{R}^n \mapsto \int_{\mathbb{R}^m} f(x,y)dx$ sont mesurables positives. On a de plus*

$$\int_{\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n} f(x,y)dxdy = \int_{\mathbb{R}^m} \left[\int_{\mathbb{R}^n} f(x,y)dy \right] dx = \int_{\mathbb{R}^n} \left[\int_{\mathbb{R}^m} f(x,y)\, dx \right] dy.$$

Théorème (Théorème de Fubini-Lebesgue)**.** *Si $f : \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ est mesurable et intégrable sur $\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$ (c'est-à-dire que $\int_{\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n} |f(x,y)|dxdy < \infty$) alors*

$$\int_{\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n} f(x,y)dxdy = \int_{\mathbb{R}^m} \left[\int_{\mathbb{R}^n} f(x,y)dy \right] dx = \int_{\mathbb{R}^n} \left[\int_{\mathbb{R}^m} f(x,y)\, dx \right] dy.$$

Le premier Théorème de Fubini (avec Tonelli) permet vérifier que la fonction est bien intégrable et le second (avec Lebesgue) permet de la calculer en la découpant en intégrales "simples" (car ce qui est fait dans cet énoncé peut être généralisé en passant de $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ à $\mathbb{R} \times \cdots \times \mathbb{R}$). N'oublions pas que l'on peut également traiter le cas des intégrales semi-convergentes en considérant une suite d'ensembles mesurables "tendant" vers Δ (ou $\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m$).
Voyons maintenant deux cas particuliers: les intégrales doubles et triples.

Intégrales doubles

On suppose ici que Δ est un ensemble mesurable de $\mathbb{R}^2$. On suppose qu'il existe deux fonctions ϕ_1 et ϕ_2 de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ et continues telles que $\Delta = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2,\, x \in I,\, \psi_1(x) \leq y \leq \psi_2(x)\}$ (on peut remplacer certains des $\leq$ par des $<$ dans cette écriture), où I est un ensemble mesurable de $\mathbb{R}$ (typiquement un intervalle). Alors si $|f|$ est intégrable sur Δ:

$$\int_\Delta f(x,y)dxdy = \int_I \big[\int_{\psi_1(x)}^{\psi_2(x)} f(x,y)dy \big] dx.$$

Remarquons que si Δ peut-être paramétré de cette manière, il peut l'être souvent aussi en même temps sous la forme $\Delta = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2,\, y \in J,\, \phi_1(y) \leq x \leq \phi_2(y)\}$, ce qui revient à d'abord calculer l'intégrale par rapport à x puis celle par rapport à y.

Exercice.

Calculer $\int_\Delta x \sin y\, dxdy$, où $\Delta = \{(x,y) \in [0,1]^2,\, x+y \leq 1\}$.

Intégrales triples

On étend à la dimension 3 le raisonnement précédent. On suppose donc que Δ est un ensemble mesurable de $\mathbb{R}^3$ tel qu'il existe des fonctions ψ_1, ψ_2 continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, et ϕ_1 et ϕ_2 continues de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$, telles que $\Delta = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3,\, x \in I,\, \psi_1(x) \leq y \leq \psi_2(x),\, \phi_1(x,y) \leq z \leq \phi_2(x,y)\}$ (on peut remplacer certains $\leq$ par des $<$ dans cette écriture), où I est un ensemble mesurable de $\mathbb{R}$ (typiquement un intervalle). Alors si $|f|$ est intégrable sur Δ:

$$\int_\Delta f(x,y,z)dxdydz = \int_I \big[\int_{\psi_1(x)}^{\psi_2(x)} \big[\int_{\phi_1(x,y)}^{\phi_2(x,y)} f(x,y,z)dz \big] dy \big] dx.$$

Exercice.

Déterminer le volume d'un tétraèdre régulier (6 arêtes de même longueur ℓ, chacune des 4 faces étant un triangle équilatéral).

Passons maintenant au changement de variable. Remarquons tout d'abord que l'on ne peut pas simplement appliquer la formule du changement de variable pour les intégrales simples à chacune des variables. Par exemple, si on passe de (x, y) à $(2x+3y, -x-y)$ comment faire? Commençons par définir les changements de variables "admissibles": ce seront les $\mathcal{C}^1$-difféomorphismes dont nous avons vu la définition au chapitre 2.

Définition (Rappel)**.** *Une fonction de classe $\mathcal{C}^1(I)$ où I est un pavé de $\mathbb{R}^n$, bijective, et dont la réciproque est également de classe $\mathcal{C}^1$ est appelée un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme sur I.*

Définition. *Pour ϕ une fonction telle que $\phi(u_1, \cdots, u_n) = \big(\phi_1(u_1, \cdots, u_n), \cdots, \phi_n(u_1, \cdots, u_n)\big)$ soit un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme sur I où I est un pavé de $\mathbb{R}^n$, on appelle matrice jacobienne de ϕ la matrice carrée:*

$$J_\phi(u_1, \cdots, u_n) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial \phi_1}{\partial u_1}(u_1, \cdots, u_n) & \cdots & \dfrac{\partial \phi_1}{\partial u_n}(u_1, \cdots, u_n) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \dfrac{\partial \phi_n}{\partial u_1}(u_1, \cdots, u_n) & \cdots & \dfrac{\partial \phi_n}{\partial u_n}(u_1, \cdots, u_n) \end{pmatrix}$$

Le déterminant de $J_\phi(u_1, \cdots, u_n)$ est appelé jacobien de ϕ (ou jacobien du changement de variable). On notera souvent $\big|J_\phi(u_1, \cdots, u_n)\big|$ la valeur absolue de ce déterminant.

Théorème (Formule du changement de variables)**.** *Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ une fonction mesurable et Δ un ensemble mesurable de $\mathbb{R}^n$ tels que $\int_\Delta |f(x)| dx < \infty$. Par ailleurs on suppose qu'il existe ϕ un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme de $\Delta' \subset \mathbb{R}^n$ dans Δ tel que $\phi(u_1, \cdots, u_n) = \big(\phi_1(u_1, \cdots, u_n), \cdots, \phi_n(u_1, \cdots, u_n)\big)$ et $\big|J_\phi(u_1, \cdots, u_n)\big| > 0$ sur Δ'. Alors*

$$\int_\Delta f(x_1, \cdots, x_n) dx_1 \cdots dx_n = \int_{\Delta'} \big|J_\phi(u_1, \cdots, u_n)\big| \times f\big(\phi_1(u_1, \cdots, u_n), \cdots, \phi_n(u_1, \cdots, u_n)\big) du_1 \cdots du_n.$$

Exemple.

Changement de variable en polaire dans $\mathbb{R}^2$, en sphérique dans $\mathbb{R}^3$.

Exercice.

Calculer $\int_{\mathbb{R}^2} e^{-(x^2+y^2)/2} dx dy$ après avoir montré son existence. En déduire $\int_{\mathbb{R}} e^{-x^2/2} dx$.

3 Intégrales dépendant d'un paramètre

On s'intéresse ici aux différentes propriétés (domaine de définition, continuité, dérivabilité,...) de la fonction $F : x \in I \mapsto \int_J f(x,t)dt$ où $f : (x,t) \in I \times J \mapsto f(x,t) \in \mathbb{R}$.

3.1 Théorèmes de convergence pour des suites d'intégrales

Pour commencer, on considère une suite de fonctions de la forme $\left(\int_J f_n(x)dx\right)_{n\in\mathbb{N}}$ où $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de fonctions "intégrables" sur J (la notion d'intégrabilité reste pour l'instant celle de Riemann, c'est-à-dire presque le fait d'être continu par morceaux; les deux théorèmes qui suivent s'appliquent en fait à des fonctions beaucoup plus générales...).

Théorème. (Théorème de convergence monotone) *Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions continues par morceaux sur $J \subset \mathbb{R}$ telles que:*

1. *pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\int_J f_n(x)dx$ existe;*
2. *pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f_n \leq f_{n+1}$ (donc pour tout $x \in J$, $f_n(x) \leq f_{n+1}(x)$);*
3. *il existe $f : J \to \mathbb{R}$, continue par morceaux, telle que pour tout $x \in J$, $f_n(x) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} f(x)$ (convergence simple).*

Alors
$$\lim_{n\to\infty} \int_J f_n(x)dx = \int_J \lim_{n\to\infty} f_n(x)dx = \int_J f(x)dx \quad \textit{(cette limite pouvant être } +\infty\textit{)}.$$

Exemple.

Appliquer le résultat précédent à la suite de fonctions $f_n(x) = x^n$ sur $[0,1]$.

Le théorème qui suit sera beaucoup plus intéressant:

Théorème. (Théorème de convergence dominée dit encore Théorème de Lebesgue) *Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions continues par morceaux sur $J \subset \mathbb{R}$ telles que:*

1. *pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\int_J f_n(x)dx$ existe;*
2. *il existe une fonction $g : J \to \mathbb{R}$ positive et continue par morceaux telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|f_n| \leq g$ (donc pour tout $x \in J$, $|f_n(x)| \leq g(x)$) et $\int_J g(x)dx$ existe;*
3. *il existe $f : J \to \mathbb{R}$, continue par morceaux, telle que pour tout $x \in J$, $f_n(x) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} f(x)$ (convergence simple).*

Alors
$$\lim_{n\to\infty} \int_J f_n(x)dx = \int_J \lim_{n\to\infty} f_n(x)dx = \int_J f(x)dx.$$

Ce théorème s'applique donc à une fonction dont la valeur absolue est inférieure à une autre fonction qui est intégrable. Cela peut être beaucoup demander quand les fonctions "oscillent" autour de 0 (par exemple pour l'exemple suivant $f_n(x) = n\sin(x/n)/x$ sur $I = \mathbb{R}$). On est alors obligé de travailler "à la main" pour montrer la convergence.

Exemple.

Traiter le cas des séries de fonctions sur $\mathbb{R}$: $f_n(x) = e^{-x^2}(\sin x)^n$ puis $f_n(x) = n\dfrac{\sin(x/n)}{x}$.

Attention, pour le théorème de Lebesgue la domination est essentielle. Par exemple pour la suite de fonctions $f_n(x) = x/n$ pour $x \leq n$ et $f_n(x) = 0$ si $x \geq n$, les fonctions sont intégrables sur $\mathbb{R}_+$ et ont bien une limite simple (la fonction nulle) mais il n'y a pas possibilité d'interchanger intégrale et limite sur $\mathbb{R}_+$.

3.2 Continuité d'une intégrale dépendant d'un paramètre

Proposition. *Soit $f : (x,t) \in I \times J \mapsto f(x,t) \in \mathbb{R}$ une fonction continue sur $I \times J$ (I et J peuvent être des ouverts). On suppose par ailleurs qu'il existe une fonction $g : I \to \mathbb{R}_+$, positive, continue, telle que*

$$|f(x,t)| \le g(t) \quad \text{pour } (x,t) \in I \times J.$$

Si $\int_J g(t)dt < \infty$ alors la fonction $F : x \in I \mapsto \int_J f(x,t)dt$ existe et est continue sur I.

Remarque.

Comme les ensembles I et J peuvent être des ouverts, la proposition précédente s'applique aussi aux intégrales généralisées (impropres). Par exemple, si $J = [a,b[$, $\int_J f(x,t)dt = \int_a^b f(x,t)dt$.

Proof. Pour $x_0 \in I$, on s'intéresse à $\lim_{x\to x_0} F(x)$. Mais pour $(h_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite tendant vers 0, on a $\lim_{x\to x_0} F(x) = \lim_{n\to\infty} \int_J f(x_0+h_n,t)dt$. Or pour tout $t \in J$, $\lim_{n\to\infty} f(x_0+h_n,t) = f(x_0,t)$ car f est continue en x_0 par hypothèse, et pour tout $t \in J$, $|f(x_0,t)| \le g(t)$ et $\int_J g(t)dt < \infty$. Donc d'après le Théorème de Lebesgue, on peut intervertir la limite et l'intégrale et $\lim_{n\to\infty} \int_J f(x_0+h_n,t)dt = \int_J \lim_{n\to\infty} f(x_0+h_n,t)dt = \int_J f(x_0,t)dt = F(x_0)$: F est bien continue en x_0. $\square$

Exercice.

Déterminer l'ensemble de définition et de continuité de la fonction $F(x) := \int_0^\infty \frac{e^{-t}}{x+t}dt$.

Corollaire. *Sous les hypothèses de la propriété précédente, si $a : I \to J$ et $b : I \to J$ sont deux fonctions continues sur I telles que $a \le b$, alors la fonction $G : x \in I \mapsto \int_{a(x)}^{b(x)} f(x,t)dt$ est continue sur I.*

Proof. On peut reprendre la même preuve que la proposition précédente, mais on considère maintenant $h(x,t) = f(x,t)\mathbb{I}_{a(x)\le t\le b(x)}$. On a clairement $G(x) = \int_J h(x,t)dt$. Comme a et b sont des fonctions continues, pour tout $t \in J$ avec $t \neq a(x_0)$ et $t \neq b(x_0)$, $\lim_{n\to\infty} \mathbb{I}_{a(x_0+h_n)\le t\le b(x_0+h_n)} = \mathbb{I}_{a(x_0)\le t\le b(x_0)}$ pour tout $x_0 \in I$, d'où $\lim_{n\to\infty} h(x_0+h_n,t) = h(x_0,t)$. De plus pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $t \in J \setminus \{a(x_0), b(x_0)\}$, $|h(x_0+h_n,t)| \le g(t)$. On peut donc encore appliquer le Théorème de Lebesgue et $\lim_{n\to\infty} G(x_0+h_n) = G(x_0)$: G est bien continue en x_0. $\square$

Corollaire. *Soit $f : (x,t) \in I \times [a,b] \mapsto f(x,t) \in \mathbb{R}$ une fonction continue sur $I \times [a,b]$. Alors la fonction $F : x \in I \mapsto \int_a^b f(x,t)dt$ existe et est continue sur I.*

Proof. Dans ce cas, comme J est un intervalle compact $[a,b]$, et f est continue sur $I \times J$, on peut poser pour tout $(x,t) \in I \times J$, $|f(x,t)| = g_x(t)$ avec $\int_J g_x(t)dt < \infty$ car g_x est continue et $J = [a,b]$. La proposition peut donc être appliquée. $\square$

Exemple.

Déterminer l'ensemble de définition et de continuité de $F(x) = \displaystyle\int_0^\infty \frac{x}{t^2+x^2}dt.$

3.3 Dérivabilité d'une intégrale dépendant d'un paramètre

Propriété. *Soit $f : (x,t) \in I \times J \mapsto f(x,t) \in \mathbb{R}$ une fonction continue sur $I \times J$ admettant une dérivée partielle $\frac{\partial f}{\partial x}$ continue sur $I \times J$ et telle qu'il existe $g_0 : I \to \mathbb{R}_+$ et $g_1 : I \to \mathbb{R}_+$, positives, continues, vérifiant*

$$|f(x,t)| \le g_0(t) \quad \text{et} \quad \Big|\frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\Big| \le g_1(t) \quad \text{pour } (x,t) \in I \times J.$$

Si $\int_J g_0(t)dt < \infty$ et $\int_J g_1(t)dt < \infty$, alors la fonction $F : x \in I \mapsto \int_J f(x,t)dt$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I et

$$F'(x) = \int_J \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)dt \quad \text{pour tout } x \in I.$$

Proof. Soit $x_0 \in J$. Alors $F(x_0+h_n) - F(x_0) = \int_J \big(f(x_0+h_n,t) - f(x_0,t)\big)dt$ car les deux intégrales sont absolument convergente d'après le Théorème de Lebesgue. Ainsi,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{F(x_0+h_n) - F(x_0)}{h_n} = \lim_{n\to\infty} \int_J \frac{f(x_0+h_n,t) - f(x_0,t)}{h_n}dt$$

Mais on sait que $\lim_{n\to\infty} \frac{f(x_0+h_n,t)-f(x_0,t)}{h_n} = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,t)$ car on a supposé que $\frac{\partial f}{\partial x}$ est continue sur $I \times J$. De plus, d'après le Théorème des Accroissements Finis, on sait que $\big|\frac{f(x_0+h_n,t)-f(x_0,t)}{h_n}\big| \le \sup_{x\in J} \big|\frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\big|$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et par hypothèse, pour tout $t \in I$, $\sup_{x\in J} \big|\frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\big| \le g_1(t)$ avec $\int_J g(t)dt < \infty$. On peut donc appliquer le Théorème de Lebesgue à la suite de fonctions $\big(\frac{f(x_0+h_n,t)-f(x_0,t)}{h_n}\big)_{n\in\mathbb{N}}$ et donc $\lim_{n\to\infty} \frac{F(x_0+h_n)-F(x_0)}{h_n} = \int_J \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,t)dt$: la fonction F est bien dérivable en x_0. La continuité de F' se déduit facilement du fait de la proposition précédente (continuité) car $x \mapsto \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)$ est continue et majorée par une fonction intégrable. $\square$

Attention, le fait que f doit être aussi dominée est important.

Exercice.

Déterminer l'ensemble de définition, de continuité et de dérivabilité de la fonction $F(x) := \int_0^\infty e^{-t^2}\cos(tx)dt$. Calculer $F'(x)$. Montrer que F est solution d'une équation différentielle linéaire, et en déduire l'expression exacte de F.

Corollaire. *Sous les hypothèses de la propriété précédente, si $a : I \to J$ et $b : I \to J$ sont deux fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur I telles que $a \leq b$, alors la fonction $G : x \in I \mapsto \int_{a(x)}^{b(x)} f(x,t)dt$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I et*

$$F'(x) = \int_{a(x)}^{b(x)} \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)dt + b'(x)f(x,b(x)) - a'(x)f(x,a(x)) \quad \textit{pour tout} \;\; x \in I.$$

Proof. Soit $x_1 \in J$. D'après la proposition précédente, pour $x \in J$, on peut noter $F_{x_1}(x,y) = \int_{x_1}^y f(x,t)dt$. Il est clair que $G(x) = F_{x_1}(x,b(x)) - F_{x_1}(x,a(x))$. Il reste à montrer que $\frac{\partial F_{x_1}}{\partial y}(x,y)$ existe et est continue. Pour ce faire, on considère $\frac{F_{x_1}(x,y_0+h_n)-F_{x_1}(x,y_0)}{h_n} = \frac{1}{h_n}\int_{y_0}^{y_0+h_n} f(x,t)dt$. Il est facile de voir que lorsque (h_n) est une suite qui tend vers 0 alors le taux de variation précédent tend vers $f(x,y)$ (on utilise par exemple une primitive en t de $f(x,t)$). La continuité de $\frac{\partial F_{x_1}}{\partial y}(x,y)$ s'obtient aussi du fait que $t \to f(x,t)$ est continue. Ainsi $\frac{\partial F_{x_1}}{\partial y}(x,y)$ existe et est continue. Maintenant, comme $G(x) = F_{x_1}(x,b(x)) - F_{x_1}(x,a(x))$, G est bien de classe $\mathcal{C}^1$ sur J car les fonctions a et b sont aussi de classe $\mathcal{C}^1$ sur J et $G'(x) = \frac{\partial F_{x_1}}{\partial x}(x,b(x)) + b'(x)\frac{\partial F_{x_1}}{\partial y}(x,b(x)) - \frac{\partial F_{x_1}}{\partial x}(x,a(x)) - a'(x)\frac{\partial F_{x_1}}{\partial y}(x,b(x)) = \int_{a(x)}^{b(x)} \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)dt + b'(x)f(x,b(x)) - a'(x)f(x,a(x))$. □

Corollaire. *Soit $f : (x,t) \in I \times [a,b] \mapsto f(x,t) \in \mathbb{R}$ une fonction continue sur $I \times [a,b]$ admettant une dérivée partielle $\frac{\partial f}{\partial x}$ continue sur $I \times [a,b]$. Alors la fonction $F : x \in I \mapsto \int_a^b f(x,t)dt$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I et*

$$F'(x) = \int_a^b \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)dt \quad \textit{pour tout} \;\; x \in I.$$

Proof. La démonstration copie le cas correspondant pour la continuité. □

Exemple.

Calculer $\int_0^1 \cos(xt)dt$ pour $x \in \mathbb{R}$. En déduire que la fonction sinus cardinal $F(x) = \sin x/x$ pour $x \neq 0$, $F(0) = 1)$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.

4 Equations différentielles linéaires

On s'intéresse ici à des équations liant les dérivées d'une même fonction. Ce genre d'équation se retrouve pour décrire la dynamique propre de nombreux systèmes physiques (mécanique newtonnienne par exemple), chimiques (cinétique chimique), économiques (finances ou microéconomie),... La forme générale d'une équation différentielle est $h(y, y', \cdots, y^{(k)}, x) = 0$ où h est une fonction explicite; on cherche alors des fonctions $x \to y(x)$ pouvant vérifier une telle équation. Par exemple, $y''(x)\,\sin(y'(x)) = 2x\,y^3(x) + 2\ln x$ est une équation différentielle. Le cas général est difficile. On peut tout de même donner un théorème très général d'existence et d'unicité d'une solution: c'est le Théorème De Cauchy-Lipschitz (existence et unicité sont essentielles en physique ou chimie par exemple).

4.1 Théorème de Cauchy-Lipschitz général

On considère l'équation différentielle générale

$$\frac{\partial Y}{\partial x}(x) = Y'(x) = h(Y, x), \tag{1}$$

où h est une fonction de $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}^n$. Notons par exemple que si on pose $Y = (y, y')$ on peut ainsi retrouver une équation reliant y, y' et y''.
Notons que dans (1) n'est pas précisé sur quel ensemble on prend x. Il est facile de voir que si l'intervalle $I \subset \mathbb{R}$ est un tel ensemble, et qu'il existe une solution Y_0 de l'équation différentielle (1) sur I, alors pour tout autre intervalle $J \subset I$, $Y_{0/J}$ (Y_0 restreinte à l'intervalle J) est aussi une solution de (1) mais sur J.

Définition. *On dit que Y_0 est une solution maximale de l'équation différentielle (1) si elle n'est pas la restriction d'une autre solution de (1).*

Attention! une équation différentielle peut avoir plusieurs ou même une infinité de solutions maximales.

Exemple.

Soit l'équation différentielle $y' = a\,y$, où $a \in \mathbb{R}$ est une constante. Trouver une solution maximale, puis des solutions non maximales.

On peut spécifier un peu plus une équation différentielle en rajoutant une condition initiale.

Définition (Problème de Cauchy). *Pour h une fonction de $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}^n$, $x_0 \in \mathbb{R}$ et $y_0 \in \mathbb{R}^n$, on appelle Problème de Cauchy la résolution du système suivant:*

$$\left\{\begin{array}{l} Y'(x) = h(Y, x) \\ Y(x_0) = y_0 \end{array}\right. . \tag{2}$$

Voici maintenant un "gros" théorème qui permet de montrer l'existence et l'unicité d'une solution maximale au Problème de Cauchy.

Théorème (Théorème de Cauchy-Lipschitz général)**.** *Soit le problème de Cauchy (2) précédent. Soit U_n une boule ouverte de $\mathbb{R}^n$ et I un intervalle de $\mathbb{R}$ tels que $x_0 \in I$ et $y_0 \in U_n$. Si on suppose en plus que h est continue sur $U_n \times I$ et qu'il existe $K > 0$ tel pour tout $(y_1, y_2, x) \in U_n \times U_n \times I$,*

$$\|h(y_1, x) - h(y_2, x)\| \le K\,\|y_1 - y_2\|$$

(h est Lipschitzienne par rapport à sa première variable), alors il existe une unique solution de (2) sur I. Tout autre solution de (2) est une restriction de cette solution sur un intervalle inclus dans I contenant x_0.

Proof. Nous ne donnerons qu'une esquisse de la preuve car donner une preuve rigoureuse et intégrale nécessite des connaissances au-delà du niveau supposé de ce cours. On suppose donc une suite de fonction $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie de la manière suivante: z_0 est fixée (par exemple $z_0(x) = 0$ pour tout $x \in I$) et on pose la relation de récurrence $z_{n+1}(x) = y_0 + \displaystyle\int_{x_0}^{x} h(z_n(t), t)dt$ pour $t \in I$. C'est ce que l'on appelle une itération de Picard. On peut montrer que la suite $(z_n)_n$ converge car elle est une suite de Cauchy et grâce à un théorème du point fixe, celui-ci étant vérifié du fait que h est Lipshitzienne par rapport à la première variable. De plus $z_n(t_0) = y_0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. On a donc convergence vers un unique point fixe. $\square$

Ce théorème est très intéressant pour démontrer l'existence et l'unicité, mais il ne nous offre pas de méthode pour déterminer explicitement des solutions aux équations différentielles. Pour cela nous allons restreindre nos ambitions et ne considérer que des équations différentielles linéaires.

4.2 Equations différentielle linéaires

On s'intéresse à:

$$(E) \quad y^{(n)}(x) + a_{n-1}(x)y^{(n-1)}(x) + \cdots + a_1(x)y'(x) + a_0(x)y(x) = b(x),$$

où $a_0, a_1, \cdots, a_{n-1}$ et b sont des fonctions continues sur un intervalle I.
Avant de tenter de trouver des solutions à une équation différentielle linéaire, voici une petite proposition bien utile pour simplifier la recherche de solutions.

Proposition (Méthode de superposition des solutions)**.** *On suppose l'équation différentielle linéaire*

$$(E_{1,2}) \quad y^{(n)}(x) + a_{n-1}(x)y^{(n-1)}(x) + \cdots + a_1(x)y'(x) + a_0(x)y(x) = b_1(x) + b_2(x),$$

b_1 et b_2 étant continues sur I. Alors si y_i pour $i = 1, 2$ est solution de (E_i) $\quad y^{(n)}(x) + a_{n-1}(x)y^{(n-1)}(x) + \cdots + a_1(x)y'(x) + a_0(x)y(x) = b_i(x)$ alors $y_1 + y_2$ est solution de $(E_{1,2})$.

Proof. On pose $y = y_1 + y_2$. Alors on vérifie bien par linéarité que y est solution de l'équation $(E_{1,2})$. □

En particulier si $b_1 = 0$, l'équation (E_1) est appelée équation homogène associée à $(E_{1,2})$.

Corollaire (Corrolaire du Théorème de Cauchy-Lipschitz)**.** *Sous les conditions de continuité de $a_0, a_1, \cdots, a_{n-1}$ sur I, il existe une unique solution (maximale) sur I de (E) quand on a fixé les conditions initiales sous la forme $y(x_0) = y_0,\ y'(x_0) = y_1, \cdots, y^{(n-1)}(x_0) = y_{n-1}$, où $x_0 \in I$ et $(y_0, \cdots, y_{n-1}) \in \mathbb{R}^n$.*

Proof. On pose $Y = (y^{(n-1)}, \cdots, y', y)$. Alors (E) s'écrit $Y' = AY + B$, où A est une matrice carrée de taille n (voir ci-dessous), et $B = (b, 0, \cdots, 0)$. La seule chose à vérifier est que la fonction $h(y, x) = A(x)y + B(x)$ est bien Lipshitzienne par rapport à la première variable (il est clair qu'elle est continue). Mais on a $\|h(y_1, x) - h(y_2, x)\| \leq \|A(x)\|\|y_1 - y_2\|$ en raison des propriétés des normes et comme la matrice $A(x)$ est de taille n et est continue sur I alors $k = \|A(x)\| < \infty$. □

Conséquence.

1. L'ensemble $\mathcal{H}$ des solutions de l'équation homogène associée à (E), soit

$$(EH) \quad y^{(n)}(x) + a_{n-1}(x)y^{(n-1)}(x) + \cdots + a_1(x)y'(x) + a_0(x)y(x) = 0,$$

   est un espace vectoriel de dimension n.

2. Si $(y_1(x), \cdots, y_n(x))$ est une base de $\mathcal{H}$, et si $\tilde{y}(x)$ est une solution particulière de (E), alors l'ensemble $\mathcal{S}$ des solutions de (E) est

$$\mathcal{S} = \{a_1 y_1(x) + \cdots + a_n y_n(x) + \tilde{y}(x) \mid (a_1, \cdots, a_n) \in \mathbb{R}^n\}.$$

Proof. 1. On montre facilement que $\mathcal{H}$ est un espace vectoriel comme sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel constitué par les fonctions de classe $\mathcal{C}^n(I)$. Par ailleurs, l'application qui à tout $(y_0, \cdots, y_{n-1}) \in \mathbb{R}^n$ associe y solution du problème de Cauchy avec conditions initiales est un isomorphisme (la linéarité est claire du fait de la structure linéaire de l'équation homogène et la bijectivité se déduit du Théorème de Cauchy-Lipshitz). Donc $\mathcal{H}$ a la même dimension que $\mathbb{R}^n$, donc n.
2. Cela se déduit immédiatement par la propriété de superposition des constantes: soit $\tilde{y}$ une solution particulière de (E). On peut toujours écrire que si y est une solution de (E) alors elle peut s'écrire sous la forme $y = \tilde{y} + u$, où u est une fonction. Alors $u = y - \tilde{y}$ est solution de (E_H). D'où la propriété. □

Proposition. *Si les fonctions $a_i(x)$ sont des constantes ($= a_i$ pour $i = 0, \cdots, n-1$), alors on trouve explicitement l'ensemble $\mathcal{H}$ des solutions de l'équation différentielle homogène (EH) qui s'écrivent sous la forme $Y(x) = {}^t(y^{(n-1)}(x), \cdots, y'(x), y(x)) = \lambda \exp(xA)$, avec $\lambda \in \mathbb{R}^n$ et*

$$A = \begin{pmatrix} -a_{n-1} & -a_{n-2} & \cdots & -a_2 & -a_1 & -a_0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Proof. Il est clair que l'équation (E_H) s''écrit aussi $Y' = AY$. □

Pour déterminer une exponentielle de matrice, on commence par tenter de diagonaliser A. Si cela est possible on diagonalise A (dans $\mathbb{R}$ ou dans C) car l'exponentielle d'une matrice diagonale D est simplement la matrice diagonale dont les termes diagonaux sont les exponentielles des termes diagonaux de D.
Cependant le polynôme caractéristique de cette matrice A est simple et s'écrit

$$\chi(\lambda) = (-1)^n(\lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + a_{n-2}\lambda^{n-2} + \cdots + a_1\lambda + a_0).$$

Aussi, définit-on:

Définition. *On appelle équation caractéristique associée à l'équation différentielle linéaire à coefficients constants $y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \cdots + a_1y' + a_0y = 0$ l'équation*

$$X^n + a_{n-1}X^{n-1} + a_{n-2}X^{n-2} + \cdots + a_1X + a_0 = 0.$$

Propriété. *Si son équation caractéristique admet m racines complexes distinctes $\lambda_1, \cdots, \lambda_m$ de multiplicités respectives $r_1, \cdots, r_m$, alors* **dans $\mathbb{C}$**,

$$\mathcal{H} = \big\{ \sum_{k=1}^{m} Q_k(x)e^{\lambda_k x},\ Q_k \in \mathbb{C}_{r_k-1}[X]\big\}.$$

Conséquence.

Si son équation caractéristique admet q couples de racines complexes conjuguées $(z_1, \overline{z_1}), \cdots, (z_q, \overline{z_q})$ tels que $z_j = \mathcal{R}e(z_j) + i\,\mathcal{I}m(z_j)$ et $\mathcal{I}m(z_j) \neq 0$, de multiplicités respectives $\ell_1, \cdots, \ell_q$, et p racines réelles $x_1, \cdots, x_p$ de multiplicités respectives $m_1, \cdots, m_p$, alors la solution générale de l'équation différentielle linéaire à coefficients constants $y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \cdots + a_1y' + a_0y = 0$ est

$$\begin{aligned} y(x) = R_1(x)e^{x_1 x} + \cdots R_p(x)e^{x_p x} + \big(P_1(x)\cos(\mathcal{I}m(z_1)x) + Q_1(x)\sin(\mathcal{I}m(z_1)x)\big)e^{\mathcal{R}e(z_1)x} + \cdots \\ + \big(P_q(x)\cos(\mathcal{I}m(z_q)x) + Q_q(x)\sin(\mathcal{I}m(z_q)x)\big)e^{\mathcal{R}e(z_q)x} \end{aligned}$$

où les P_i, Q_i sont des polynômes réels de degré $\ell_i - 1$ et les R_i des polynômes réels de degré $m_i - 1$.

Proof. Pour simplifier la preuve nous commencerons par travailler dans $\mathbb{C}$ et reviendrons dans $\mathbb{R}$ à la fin. Notons que dans $\mathbb{C}$ la dimension de $\mathcal{H}$ est $2n$ du fait de l'isomorphisme entre $\mathcal{H}$ et $\mathbb{C}^n$ et le fait que $\mathbb{C}^n$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension $2n$. En premier lieu, pour $f \in \mathcal{C}^1(R)$, l'application $f \mapsto D(f) = f'$ est linéaire. On définit facilement pour $f \in \mathcal{C}^k(R)$, l'application $D^k = D_oD_O \cdots D$ est également linéaire, tout comme $P(D) = D^n + a_{n-1}D^{n-1} + \cdots + a_1D + a_0I_d$ pour $f \in \mathcal{C}^n(R)$. On voit ainsi que y est solution de (EH) si et seulement si $y \in \ker P(D)$. Mais P est scindé dans $\mathbb{C}[X]$, soit $P(X) = \prod_{j=1}^m (X - \lambda_j)^{r_j}$ (donc P admet m racines complexes chacune ayant une multiplicité r_j). Mais P est donc un polynôme annulateur de D sur $\ker P(D)$ donc d'après la décomposition des polynômes annulateurs en racines simples, on a $\ker P(D) = \ker\big[(D-\lambda_1)^{r_1}\big] \oplus \ker\big[(D-\lambda_2)^{r_2}\big] \oplus \cdots \oplus \ker\big[(D-\lambda_m)^{r_m}\big]$ car les racines λ_j sont distinctes. Il revient donc de chercher une base de $\ker\big[(D-\lambda_j)^{r_j}\big]$. Mais si $f_j \in \mathcal{C}^n(R)$ est telle que $f_j(x)e^{\lambda_j x} \in \ker\big[(D-\lambda_j)^{r_j}\big]$ alors $(D-\lambda_j)^{r_j} f_j(x)e^{\lambda_j x} = 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, ce qui revient à $f_j^{(r_j)}(x)e^{\lambda_j x} = 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, soit $f_j = Q_j$, un polynôme à coefficients complexes de degré $r_j - 1$. Ainsi $\dim\ker\big[(D-\lambda_j)^{r_j}\big] = 2r_j$, et comme $2n = 2(r_1 + \cdots + r_m)$, on en déduit donc que dans $\mathbb{C}$, l'ensemble des solutions de (EH) est $\big\{\sum_{j=1}^m Q_j(x)e^{\lambda_j x},\ Q_j \in \mathbb{C}_{r_j-1}[X]\big\}$. Pour trouver les solutions réelles de (EH), on doit donc prendre la partie réelle de ces solutions, ce qui revient dans le cas où λ_j est réel à choisir Q_j à coefficients réels, et dans le cas où λ_j est un nombre complexe, à décomposer $e^{\lambda_j x} = \big[\cos(\mathcal{I}m(\lambda_j)) + i\sin(\mathcal{I}m(\lambda_j))\big]\, e^{x\,\mathcal{R}e(\lambda_j)}$. □

Exercice.

Résoudre $y'' + 3y' + 2y = 0$, $y'' + 4y = 0$, $y''' + y'' + y' = 0$.

Corollaire. *Pour une équation différentielle à coefficient constants $y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \cdots + a_1y' + a_0y = b$ avec $b(x) = T(x)e^{\alpha x}$, T étant un polynôme de degré d et $\alpha \in \mathbb{R}$, alors on peut trouver une solution particulière de cette équation sous la forme $y_0(x) = Q(x)e^{\alpha x}$, où Q est un polynôme réel de degré $d + m_\alpha$, où m_α est la multiplicité de α comme racine réelle de l'équation caractéristique (si α n'est pas racine, $m_\alpha = 0$).*

Proof. Avec les notations de la preuve précédente, et en travaillant dans le cas complexe, on commence par montrer que $F = \{Q(x)e^{\alpha x},\ Q \in \mathbb{C}_k[X]\}$ est un espace vectoriel. Ensuite, on montre facilement que pour $f \in F$, $D(f) \in F$. Donc si on note D_F l'application D restreinte à F, $D_F : F \to F$ est un endomorphisme. En en déduit de même pour $P(D)_F$ qui est l'application $P(D)$ restreinte à F: c'est donc aussi un endomorphisme. Par ailleurs, si α n'est pas une racine de l'équation caractéristique, comme $\mathcal{H} = \ker P(D)$ on en déduit que $\ker P(D)_F = \{0\}$ car $F \cap \mathcal{H} = \{0\}$. Par conséquent, $P(D)_F$ est un isomorphisme (et même un automorphisme). Comme l'équation (E) s'écrit également $P(D)(y) = T(x)e^{\alpha x}$, on peut en déduire qu'il existe une unique solution dans F qui est $\tilde{y} = \big(P(D)_F\big)^{-1}(T(x)e^{\alpha x})$. Si α est une racine de P, tout se passe de la même manière, sauf que dans ce cas $\ker P(D)_F = \{S(x)e^{\alpha x},\ S \in \mathbb{C}_{m_\alpha - 1}[X]\}$ s.e.v. de F de dimension $2m_\alpha$. En conséquence $\dim \Im P(D)_F = \dim F - 2m_\alpha$, on ne peut trouver une solution à l'équation $P(D)_F(y) = T(x)e^{\alpha x}$ avec $T \neq 0$ que si $\dim \Im P(D)_F \geq 2\deg T$, soit $\dim F = 2\deg T + 2m_\alpha$ dans $\mathbb{C}$, soit $\dim F = \deg T + m_\alpha$ dans $\mathbb{R}$. □

Corollaire. *Pour une équation différentielle à coefficient constants* $y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \cdots + a_1 y' + a_0 y = b$ *avec* $b(x) = P(x)\cos(\beta x)e^{\alpha x}$ *ou* $b(x) = P(x)\sin(\beta x)e^{\alpha x}$*,* P *étant un polynôme de degré* d *et* $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$*, alors on peut trouver une solution particulière de cette équation sous la forme* $y_0(x) = \big(Q(x)\cos(\beta x) + R(x)\sin(\beta x)\big)e^{\alpha x}$*, où* Q *et* R *sont des polynômes de degré* $d+m$*, où* m *est la multiplicité de* $\alpha + i\beta$ *comme racine complexe de l'équation caractéristique (si* $\alpha + i\beta$ *n'est pas racine,* $m = 0$*).*

Proposition (Méthode de la variation des constantes)**.** *On suppose que* $(y_1(x), \cdots, y_n(x))$ *est une base de* $\mathcal{H}$ *et on ne connaît pas de solution particulière de* (E)*. Alors, on pose* $\tilde{y}(x) = \lambda_1(x)y_1(x) + \cdots + \lambda_n(x)y_1(x)$*, avec* $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$ *des fonctions dérivables sur* J*, que l'on détermine en résolvant le système:*

$$\begin{pmatrix} y_1^{(n-1)}(x) & y_2^{(n-1)}(x) & \cdots & y_n^{(n-1)}(x) \\ y_1^{(n-2)}(x) & y_2^{(n-2)}(x) & \cdots & y_n^{(n-2)}(x) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ y_1'(x) & y_2'(x) & \cdots & y_n'(x) \\ y_1(x) & y_2(x) & \cdots & y_n(x) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1'(x) \\ \lambda_2'(x) \\ \vdots \\ \lambda_{n-1}'(x) \\ \lambda_n'(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b(x) \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Proof. On a $Y' = A(x)Y + B(x)$. Soit $Y_k = {}^t(y_k^{(n-1)}, \cdots, y_k', y_k)$ une solution de $Y' = A(x)Y$. Alors en posant $Y(x) = \lambda_k(x)Y_k(x)$ où $\lambda_k : I \to \mathbb{R}$ est une fonction $\mathcal{C}^1$, on a $Y'(x) = \lambda_k'(x)Y_k(x) + \lambda_k(x)Y_k'(x)$ donc Y est solution de (E) si $\lambda_k'(x)Y_k(x) + \lambda_k(x)Y_k'(x) = A(x)\lambda_k(x)Y_k(x) + B(x)$. Or Y_k est solution de (EH), donc $\lambda_k(x)Y_k'(x) = A(x)\lambda_k(x)Y_k(x)$ et ainsi λ_k doit vérifier $\lambda_k'(x)Y_k(x) = B(x)$. Cette équation est valable pour tout $k = 1, \cdots, n$: on tombe bien sur le système de la proposition. Comme la famille $(Y_1, \cdots, Y_n)$ est une base de $\mathcal{H}$, alors le déterminant de la matrice $(Y_1, \cdots, Y_n)$ est non nul, on peut donc inverser le système et tomber ainsi sur n équations non liées vérifiées par les λ_k', ce qui permet de déterminer les λ_k et trouver ainsi une solution particulière. □

Méthode de la variation des constantes dans les cas $n = 1$ ou $n = 2$

1. **n=1**: L'équation est alors: $(E)\;\; y'(x) - a(x)y(x) = b(x)$,
   - L'ensemble $\mathcal{H}$ solution de (EH) est, avec $c \in J$:
   $$\mathcal{H} = \left\{ k \exp\left(\int_c^x a(t)dt \right) \mid k \in \mathbb{R} \right\}.$$
   - La méthode de la variation de la constante revient à écrire $\tilde{y}(x) = \lambda(x)y_1(x)$ avec $\lambda'(x)y_1(x) = b(x)$, où $y_1 \in \mathcal{H}$.

   Proof. On vérifie facilement que si $y(x) = k\exp\left(\int_c^x a(t)dt\right)$ alors $y'(x) = a(x)y(x)$ pour tout $x \in I$. Comme $\dim \mathcal{H} = 1$ et que l'on peut choisir $k \in \mathbb{R}$, on a bien trouvé toutes les solutions de (EH). □

2. **n=2**: L'équation est alors: $(E)\;\; y''(x) + a_1(x)y'(x) + a_2(x)y(x) = b(x)$,
   - Pas de méthode générale pour trouver $\mathcal{H}$, ensemble solution de (EH).
   - Si y_1 est une solution connue de (EH), on peut trouver une deuxième solution y_2 de (EH) en écrivant $y_2(x) = z(x)y_1(x)$ ce qui amène à résoudre une équation du premier ordre en z'.
   - Si on connaît $(y_1(x), y_2(x))$ base de $\mathcal{H}$, la méthode de la variation de la constante revient à écrire $\tilde{y}(x) = \lambda(x)y_1(x) + \lambda(x)y_2(x)$ et
   $$\begin{pmatrix} y_1'(x) & y_2'(x) \\ y_1(x) & y_2(x) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1'(x) \\ \lambda_2'(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b(x) \\ 0 \end{pmatrix}.$$

   Proof. La seule chose à montrer et que si y_1 est une solution connue de (EH), alors on peut trouver une deuxième solution y_2 de (EH) en écrivant $y_2(x) = z(x)y_1(x)$. En effet, $y_2'(x) = z(x)y_1'(x) + z'(x)y_1(x)$ et $y_2''(x) = z(x)y_1''(x) + 2z'(x)y_1'(x) + z''(x)y_1(x)$. Alors, si y_2 est solution de (EH), on a $y_2''(x) + a_1(x)y_2'(x) + a_0(x)y_2(x) = z(x)(y_1''(x) + a_1(x)y_1'(x) + a_0(x)y_1(x)) + 2z'(x)(y_1'(x) + a_1(x)y_1(x)) + z''(x)y_1(x) = 0$, soit $2Z(x)(y_1'(x) + a_1(x)y_1(x)) + Z'(x)y_1(x) = 0$, avec $Z = z'$ ce qui est une équation du premier ordre que l'on sait résoudre. □

4.3 Exemples d'équations différentielles se ramenant à une équation différentielle linéaire

Par un changement de variable (on remplace la fonction inconnue y d'une équation différentielle par une fonction de classe $\mathcal{C}^k$ de y ou bien on écrit la variable x à partir d'une autre variable), certaines équations différentielles non linéaires peuvent se ramener à une équation différentielle linéaire. Attention cependant au changement de variable, celui-ci doit se faire de manière bijective. On introduit ainsi la définition suivante:

Définition. *Une fonction différentiable et bijective, dont la réciproque est également différentiable est appelée un difféomorphisme.*
Plus généralement, une fonction de classe $\mathcal{C}^k$, bijective, donc la réciproque est également de classe $\mathcal{C}^k$ est appelée un $\mathcal{C}^k$-difféomorphisme.

Nous ne devrons donc maintenant que considérer des changements de variables qui sont des $\mathcal{C}^k$-difféomorphismes.

4.3.1 Equations différentielles d'Euler

Une équation d'Euler est une équation différentielle linéaire de la forme

$$a_n x^n y^{(n)}(x) + a_{n-1}x^{n-1}y^{(n-1)}(x) + \ldots + a_0 y(x) = 0 \qquad (a_n \neq 0)\,.$$

On peut se ramener à une équation à coefficients constants en effectuant le changement de variable: $x = e^t$. Pour illustrer cela, considérons l'équation d'Euler d'ordre 2:

$$a_2 x^2 y'' + a_1 x y' + a_0 y = 0$$

Alors, si l'on se place sur l'intervalle $x \in]0; +\infty[$ (pour pouvoir poser $x = e^t$) et que l'on pose $z(t) = y(x)$, on a $y'(x) = z'(t)/x$ et $y''(x) = (z''(t) - z'(t))/x^2$, on retombe sur l'équation:

$$a_2 z''(t) + (a_1 - a_2) z'(t) + a_0 = 0\,.$$

On sait ensuite résoudre une telle équation, et il suffira ensuite d'écrire que $y(x) = z(\log x)$.

Exemple.

Résoudre $x^2 y'' + x y' + y = 1$.

4.3.2 Equations différentielles de Bernoulli

On suppose l'équation différentielle:

$$y'(x) + a(x)y(x) = b(x)y(x)^m,$$

où $m \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$. On doit donc supposer ici que $y \geq 0$ si $m > 0$ (et $y > 0$ si $m < 0$). Pour résoudre cette équation on pose le changement de variable

$$u(x) = \frac{1}{y^{m-1}(x)}$$

et l'on aboutit ainsi à une équation linéaire $\frac{1}{1-m}u'(x) + a(x)u(x) = b(x)$ que l'on sait résoudre. Il faudra cependant toujours considérer des solutions telles que u soit positive.

Exemple.

Résoudre $y' + x\,y^2 = 0\,.$

4.3.3 Equations différentielles de Riccati

On suppose l'équation différentielle:

$$y' = q_0(x) + q_1(x)y + q_2(x)y^2\,,$$

où q_0, q_1 et q_2 sont trois fonctions continues sur un intervalle commun. Ce type d'équations a d'abord été rencontré en mécanique newtonienne avec l'étude d'un mouvement plan. On les a ensuite utilisées en mécanique quantique et d'autres champs de la physique (hydrologie, acoustique,...), mais également en mathématiques financières. Il n'existe pas de méthode générale pour résoudre une telle équation. Cependant, si l'on peut connaître une solution particulière y_0 à cette équation, alors on peut trouver toute ses solutions. Il suffit alors de poser $u = y - y_0$, où y est aussi solution de l'équation. Alors u vérifiera l'équation:

$$u' - (q_1 + 2q_2y_1)u = q_2u^2$$

qui est une équation de Bernoulli que l'on sait résoudre.

Exemple.

Résoudre $y' = y^2 - 2x - x^2$. On pourra chercher une solution particulière sous la forme $y(x) = ax + b$.

5 Séries entières

Définition. *Les séries entières sont des séries de fonctions de type $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n z^n$ pour $z \in \Omega \subset \mathbb{C}$, où $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de nombres complexes.*

Remarque.

Certaines séries de fonctions ne s'écrivent pas forcément à première vue comme des séries entières. Par exemple, $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n z^{3n+1}$. Mais en faisant un changement de la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en une autre suite $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ (pour notre exemple, $b_n = a_n$ si n est de la forme $3n+1$ et $b_n = 0$ sinon) on pourra retrouver l'expression usuelle d'une série entière.

Avant d'étudier plus en détail ces séries et les fonctions qu'elles peuvent représenter il convient de savoir sur quel ensemble $\Omega \subset \mathbb{C}$ une série entière est convergente.

5.1 Rayon de convergence

Théorème. Lemme d'Abel *S'il existe $\rho > 0$ tel que la suite $(|a_n|\rho^n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée alors pour tout $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| < \rho$, $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n z^n$ est absolument convergente.*

Proof. Soit $|z| < \rho$. Alors $|a_n||z|^n = (|a_n|\rho^n)\big(|z|/|\rho|\big)^n$. Donc comme $(|a_n|\rho^n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée, il existe $0 \le M < \infty$, tel que $|a_n|\rho^n \le M$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. D'où $|a_n||z|^n \le M\big(|z|/|\rho|\big)^n$ et comme $|z|/|\rho| < 1$, $\sum M\big(|z|/|\rho|\big)^n$ converge (série géométrique). D'après le théorème de comparaison des séries à termes positifs, on en déduit que $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n z^n$ est absolument convergente. □

Proposition. *Il existe un unique $R \in [0, +\infty]$ tel que:*

1. *Pour tout $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| < R$ (ou $z = 0$ si $R = 0$) alors $\sum a_n z^n$ est absolument convergente.*
2. *Si $R < +\infty$, pour tout $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| > R$ alors $a_n z^n$ ne tend pas vers 0 quand $n \to +\infty$ et $\sum a_n z^n$ diverge.*

Proof. Soit $R = \sup_{r\ge 0}\{(|a_n|r^n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée$\}$. R existe toujours (mais peut valoir $+\infty$). Comme vu avec le Lemme d'Abel, pour tout $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| < R$, alors $\sum a_n z^n$ est absolument convergente. Si $|z| > R$ alors $\lim_{n\to\infty} a_n z^n \neq 0$ (car sinon cela signifierait que $(|a_n||z|^n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée donc que R n'est pas le sup de l'ensemble ci-dessus: contradiction) et par conséquent $\sum a_n z^n$ diverge (car c'est une série numérique dont le terme général ne tend pas vers 0). □

Définition.
- *Le réel positif R de la proposition précédente est appelé le rayon de convergence de la série entière.*
- *Le disque $D(0,R) = \{z \in \mathbb{C},\ |z| < R\}$ est appelé le disque de convergence de la série entière (si $R = \infty$, $D(0,\infty) = \mathbb{C}$). Celle-ci converge pour tout $z \in D(0,R)$.*

Théorème. Règle d'Abel *S'il existe $z_0 \in \mathbb{C}$ tel que la suite $(a_n z_0^n)_{n\in\mathbb{N}}$ soit bornée, alors $R \ge |z_0|$. S'il existe $z_1 \in \mathbb{C}$ tel que la suite $(a_n z_1^n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne converge pas vers 0, alors $R \le |z_1|$.*

Proof. Ceci est immédiat d'après le théorème précédent. □

Théorème. Règle de Cauchy *Si $\lim_{n\to\infty} |a_n|^{1/n} = \ell$ avec $\ell \in [0,\infty]$, alors $R = \dfrac{1}{\ell}$ (en notant $\dfrac{1}{0} = \infty$ et $\dfrac{1}{\infty} = 0$).*

Proof. Soit $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| < 1/\ell$. Alors $|a_n||z|^n = (|a_n|^{1/n}/\ell')^n(|z|\ell')^n$ avec $|z| < 1/\ell' < 1/\ell$. Comme $\lim_{n\to\infty} |a_n|^{1/n}/\ell = 1$, on en déduit que $\lim_{n\to\infty}(|a_n|^{1/n}/\ell' < 1$ donc $((|a_n|^{1/n}/\ell')^n)_{n\in\mathbb{N}}$ est borné. Comme $|z|\ell' < 1$ et donc $\sum(|z|\ell')^n$ est convergente, on peut ensuite appliquer le théorème de comparaison pour les séries à termes positifs. Ainsi $R \ge 1/\ell$. Mais si $|z| > 1/\ell$ alors $|a_n||z|^n = (|a_n|^{1/n}|z|)^n$ ne peut donc pas tendre vers 0 quand $n \to \infty$: la série diverge et donc $R \le 1/\ell$. □

Théorème. Règle de d'Alembert *Si $\lim_{n\to\infty} \left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \ell$ avec $\ell \in [0,\infty]$, alors $R = \dfrac{1}{\ell}$ (en notant $\dfrac{1}{0} = \infty$ et $\dfrac{1}{\infty} = 0$).*

Proof. Soit $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| < 1/\ell$. Alors $\exists \ell'$ tel que $|z| < 1/\ell' < 1/\ell$ et $N_0 \in \mathbb{N}$ tel que $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \leq \ell'$ pour tout $n \geq N_0$. Ceci signifie qu'il existe $C \geq 0$ tel pour tout $n \geq N_0$, $|a_n| \leq C\,(\ell')^n$. Ainsi $|a_n||z|^n \leq C\,(\ell')^n|z|^n$ et comme $\ell'|z| < 1$, la série $\sum |a_n||z|^n$ converge (toujours d'après le théorème de comparaison). Donc $R \geq 1/\ell$. Maintenant, pour $|z| > 1/\ell$, $|a_n||z|^n$ ne tend pas vers 0 (car il existe ℓ' tel que $|z| > 1/\ell' > 1/\ell$ et $|a_n| \geq C|\ell'|^n$ avec $C > 0$) donc la série $\sum a_n z^n$ diverge. □

Exercice.

Déterminer le rayon de convergence des séries entières $\sum_{n\in\mathbb{N}} z^n$, $\sum_{n\in\mathbb{N}} n\,z^n$, $\sum_{n\in\mathbb{N}} z^n/n!$.

Propriété. *Soit $\sum a_n z^n$ et $\sum b_n z^n$ de rayon de convergence R_a et R_b.*

1. *$\sum(a_n + b_n)z^n = \sum a_n z^n + \sum b_n z^n$ est une série entière de rayon de convergence $R \geq \min(R_a, R_b)$.*

2. *$\sum c_n z^n = \sum a_n z^n \times \sum b_n z^n$ avec $c_n = \sum_{k=0}^n a_k b_{n-k}$ est une série entière de rayon de convergence $R' \geq \min(R_a, R_b)$.*

3. *$\sum(n+1)a_{n+1}z^n$ et $\sum a_{n-1}z^n/(n-1)$ ont pour rayon de convergence R_a.*

Proof. 1/ D'après le théorème de comparaison des séries à termes positifs, pour $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| < \min(R_a, R_b)$, alors $|(a_n + b_n)z^n| \leq |a_n||z|^n + |b_n||z|^n$ donc $\sum(a_n + b_n)z^n$ est absolument convergente. D'où $R \geq \min(R_a, R_b)$.
2/ Même raisonnement.
3/ Il est clair que le rayon de convergence R' de $\sum(n+1)a_{n+1}z^n$ vérifie $R' \leq R_a$. Si $z \in \mathbb{C}$ est tel que $|z| < R_a$, alors il existe $R_a > r > |z|$ tel que $\lim(n+1)|a_n||z^n| = 0$ car $(n+1)|a_n||z^n| = (n+1)|a_n|r^n|z/r|^n$ et $(|a_n|r^n)_n$ est borné (puisque $r < R_a$) et $(n+1)|z/r|^n \to 0$. Donc $R' \geq R_a$. Même raisonnement pour $\sum a_{n-1}z^n/(n-1)$. □

Exercice.

Déterminer le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n z^n$, avec $a_0 = a_1 = 0$, et pour $p \in \mathbb{N}^*$, $a_{3p} = (p + \sqrt{p})^{-1}$, $a_{3p+1} = p!/p^p$ et $a_{3p+2} = (-2)^p$.

5.2 Propriété de la somme d'une série entière

On s'intéresse donc ici aux propriétés de la fonction $z \in \Omega \mapsto \sum a_n z^n$.

Propriété. *Une série entière de rayon de convergence $R > 0$ converge normalement donc uniformément sur tout disque fermé $\overline{D}(0,\rho) = \{z \in \mathbb{C},\ |z| \leq \rho\}$ avec $\rho < R$.*

Proof. Pour tout $z \in D(0,\rho)$, on a $|a_n||z|^n \leq |a_n||\rho|^n$ et $\sum |a_n||\rho|^n$ converge car $\rho < R$. Donc $\sum \sup_{z\in D(0,\rho)}\{|a_n||z|^n\}$ converge: la série entière converge normalement. □

Théorème. Théorème de continuité *La somme d'une série entière de rayon de convergence $R > 0$ est continue sur $I =]-R, R[$.*

Proof. Soit $x_0 \in]-R, R[$. Alors il existe un voisinage de x_0, $]x_0 - \eta, x_0 + \eta[\subset]-R, R[$ tel que la série entière soit normalement (donc uniformément) convergente sur ce voisinage. Comme en plus la fonction $x \mapsto a_n x^n$ est continue sur ce voisinage, on en déduit que la série entière est continue en x_0 (d'après le théorème de continuité des séries de fonctions). □

Théorème. Théorème d'intégration *On peut intégrer terme à terme une série entière de somme $S(z) = \sum a_n z^n$ de rayon de convergence $R > 0$ sur tout intervalle inclus dans $]-R, R[$ et en particulier*

$$\forall x \in]-R, R[,\ \int_0^x S(t)dt = \int_0^x \sum_{n=0}^{+\infty} a_n t^n dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1},\ \text{série de rayon } R.$$

Proof. Soit $0 \leq x < R$. Alors la série entière est normalement (donc uniformément) convergente sur $[0, x]$. De plus, la fonction $x \mapsto a_n x^n$ est continue sur $[0, x]$ et comme on a vu que $\sum a_n t^{n+1}/(n+1)$ converge pour tout $t \in [0, x]$ (puisque le rayon de convergence de cette série entière est aussi R) on peut appliquer le théorème d'intégration des séries de fonctions et intervertir intégrale et série. □

Théorème. Théorème de dérivation *Si $S(x) = \sum a_n x^n$ est la somme d'une série entière de rayon de convergence $R > 0$, alors S est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]-R, R[$ et pour tout $x \in]-R, R[$, $S'(x) = \sum n a_n x^{n-1}$, série de rayon R.*

Proof. La preuve est similaire à celle concernant l'intégration. □

Corollaire. *Plus généralement, S est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]-R, R[$ et pour tout $x \in]-R, R[$, $S^{(k)}(x) = \sum n(n-1)\cdots(n-k+1)a_n x^{n-k}$, série de rayon R.*

5.3 Développement en série entière

Définition. *Une fonction $f : \Omega \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ est dite développable en série entière en $z_0 \in \mathbb{C}$, s'il existe $\rho > 0$ et une suite de nombres complexes $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tels que pour tout $z \in D(z_0,\rho)$, $f(z) = \sum_{n\in\mathbb{N}} a_n(z-z_0)^n$.*

Exercice.

Développement en série entière de la fonction $(a-z)^{-1}$.

Si $z_0 = 0$, on dira simplement que f est développable en série entière. C'est ce cas que nous allons étudié maintenant (les autres cas s'y ramènent).

Théorème. *Si $f(x) = \sum a_n x^n$ pour $x \in]-\rho,\rho[$ alors f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]-\rho,\rho[$, $a_n = \dfrac{f^{(n)}(0)}{n!}$ (série de Taylor) et le développement en série entière de f est donc unique.*

Proof. Le fait que f soit de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]-\rho,\rho[$ se déduit du théorème de dérivation des séries entières. On peut donc appliquer une formule de Taylor à n'importe quel ordre pour f. On voit bien alors que si $\sum a_n z^n$ est le développement en série entière de f alors $f^{(k)}(x) = \sum a_n n(n-1)\cdots(n-k+1)z^{n-k}$ d'où $f^{(k)}(0) = k!a_k$. □

Théorème. *Si f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]-\rho,\rho[$ et s'il existe 2 constantes $K > 0$ et $A > 0$ telles que $\forall x \in]-\rho,\rho[$ et $\forall n \in \mathbb{N}$ on ait $\dfrac{|f^{(n)}(x)|}{n!} \leq A\,K^n$ alors f est développable en série entière et $f(x) = \sum \dfrac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$.*

Remarque.

Toute fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]-\rho,\rho[$ n'est pas forcément développable en série entière: par exemple la fonction $f(x) = \exp(-\dfrac{1}{x^2})$ pour $x \neq 0$, $f(0) = 0$ est $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$ mais non développable en série entière (ou sinon son développement serait $f(x) = 0$ car $f^{(n)}(0) = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exemple.

Fonctions e^x, e^z, $\sin(x)$, $(1+x)^\alpha$, $\ln(1+x)$, etc...

Propriété. *Soit f et g deux fonctions développables en série entière sur $]-\rho,\rho[$ avec $f(x) = \sum a_n x^n$ et $g(x) = \sum b_n x^n$. Alors:*

1. *f' est développable en série entière sur $]-\rho,\rho[$ avec $f'(x) = \sum(n+1)a_{n+1}x^n$. Généralisation aisée pour $f^{(k)}$.*
2. *La fonction $x \to \int_0^x f(t)dt$ est développable en série entière sur $]-\rho,\rho[$ avec $\int_0^x f(t)dt = \sum a_{n-1}x^n/n$.*
3. *Si $f(0) \neq 0$, alors $1/f$ est développable en série entière.*
4. *$f+g$ est développable en série et $(f+g)(x) = \sum(a_n+b_n)x^n$ sur $]-\rho,\rho[$.*
5. *$f \times g$ est développable en série et $(f\times g)(x) = \sum c_n x^n$ sur $]-\rho,\rho[$ où $c_n = \sum_{k=0}^n a_k b_{n-k}$.*
6. *Si $g(0) = 0$ alors $f_o g$ est développable en série entière.*

Proof. Toutes ces propriétés se déduisent aisément des propriétés démontrées un peu plus tôt. □

Applications: Résolution d'équations différentielles, calcul de séries, étude de fonction, calcul d'intégrales,...

Exemple.

Calculer $\log(2)$ à 10^{-2} près à partir du développement en série entière de $\log(1-x)$.