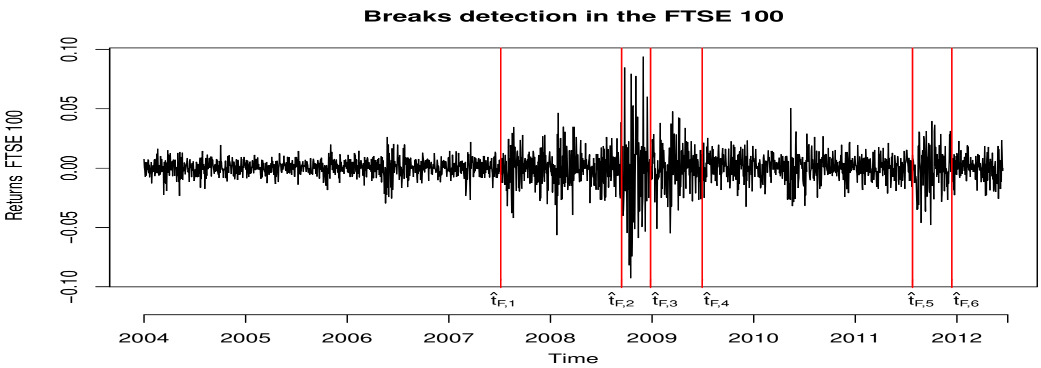
Université Paris I, Panthéon - Sorbonne

Master 2 M.M.M.E.F.

Exercices of lessons on 'Statistics for financial time series'

Jean-Marc Bardet (Université Paris 1, SAMM)



U.F.R. 27 et SAMM (Statistique, Analyse et Modélisation Multidisciplinaire)
Université Panthéon-Sorbonne, 90 rue de Tolbiac, 75013 Paris.

Tutorial n^o 0:

Some reminders...

(1) **(**)** Let $\Omega = [0,1]$ and X be the function such as $X(\omega) = \omega$ for all $\omega \in \Omega$.
  (a) Show that X is a random variable on $(\Omega, \mathcal{B}([0,1]))$, where $\mathcal{B}([0,1])$ is the Borel σ-algebra Borelian on $[0,1]$.
  (b) Let λ be the Lebesgue measure on $[0,1]$. Find the probability ditribution of X on $(\Omega, \mathcal{B}([0,1]), \lambda)$, as well than its expectation and variance.
  (c) For $n \in \mathbb{N}^*$, let (Y_n) be the sequence of functions such as $Y_n(\omega) = 1 - \omega^n$ for $\omega \in \Omega$. What are the expection and variance of Y_n? Is (Y_n) a sequence of independent r.v.? Does the sequence (Y_n) converge when $n \to \infty$ in probability? almost-surely? in $\mathbb{L}^p$?

(2) **(**)** Let X be a r.v. with distribution $\mathcal{N}(0,1)$ and Z be a Bernoulli r.v. with parameter $1/2$, X and Z are independant. Fin the distribution of $2\,Z-1$, and the one of $Y = (2Z-1)X$. Prove that (X,Y) is not a Gaussian vector. Are X and Y independant?

(3) **(**)** Let $(\varepsilon_t)_{t \in \mathbb{N}}$ be a sequence of zero-mean i.i.d.r.v. with common variance σ^2.
  (a) What is the covariance matrix of the vector $(\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_n)$ où $n \in \mathbb{N}^*$?
  (b) For all $t \in \mathbb{N}^*$, set $X_t = \varepsilon_t - \alpha\,\varepsilon_{t-1}$, where $\alpha \in \mathbb{R}$. For all $t \in \mathbb{N}*$, what is the expectation of X_t? Its variance? Are (X_t) identicaly distributed?
  (c) Compute $\operatorname{cov}(X_t, X_{t+k})$ where $(t, t+k) \in \mathbb{N}^{*2}$. Are X_t independant? Deduce the covariance matrix of $(X_1, \cdots, X_n)$ for n$\in \mathbb{N}^*$.
  (d) In case where $(\varepsilon_t)_{t \in \mathbb{N}}$ is a Gaussian process, what is the probability density of $(X_1, \cdots, X_n)$ for $n \in \mathbb{N}^*$.

(4) **(***)** Let $(\varepsilon_t)_{t \in \mathbb{N}}$ be a sequence of i.i.d.r.v. with distribution $\mathcal{N}(0, \sigma^2)$. Denote for $t \in \mathbb{N}$, $X_t = \sum_{k=1}^t \varepsilon_k$.
  (a) What is distribution law of X_t.
  (b) Show a central limit theorem satisfied by $(X_t)_t$.
  (c) Let $(X_1, \cdots, X_n)$ be an observed sample. What is the Maximum Likelihood Estimator $\widehat{\sigma}^2$ of σ^2. Provide a limit theorem satisfied by $\widehat{\sigma}^2$.

Tutorial n^o 1:

Time series: definitions and properties

(1) **(*)** Let $(\varepsilon_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ be a white noise. Indicate if the following time series are: 1/ centered, 2/ stationary, 3/ white noise, with $X_t = (2t-1)\varepsilon_t,\ Y_t = 3\varepsilon_{2t},\ Z_t = \varepsilon_t - \varepsilon_{t+1}$.

(2) **(*)** Let $(\varepsilon_t)_t$ and $(\varepsilon'_t)_t$ be two independent white noises. Is the process $(\varepsilon_t + \varepsilon'_t)_t$ a white noise?

(3) **(*)** Let $X = \{X_t, t \in \mathbb{N}\}$ un time series such as the distribution of X_0 is a uniform ditribution on $[-1,1]$ and for $n \in \mathbb{N}$, $X_{n+1} = X_n + 1$. Is X a stationary process? are X_i independent rv? Compute the functions expectation and covariance of X.

(4) **(*)** Let $(\varepsilon_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ be a Gaussian white noise with variance σ^2. Let $f : \mathbb{R} \longmapsto \mathbb{R}$ be a continuous function satisfying $f(0) = 0$. Set $X_t = f(\varepsilon_t)$ for any $t \in \mathbb{Z}$. Is the time series (X_t) a zero-mean process? A stationary process? A Gaussian process?

(5) **(*)** Let $(X_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ and $(Y_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ two non correlated time series, with autocovariance $\gamma_X(\cdot)$ and $\gamma_Y(\cdot)$ and defined spectral density $f_X(\cdot)$ and $f_Y(\cdot)$. Show that the process $Z_t = X_t + Y_t$ is a second order stationary process, and provide its autocovariance and its spectral density.

(6) **(***)** Let $(\varepsilon_t)_{t\in\mathbb{N}}$ be a white noise with variance σ^2. Define by recurrence $(X_t)_{t\in\mathbb{N}}$ for any $t \in \mathbb{N}$ by $X_{t+1} = \varepsilon_{t+1} X_t$ and $X_0 = \varepsilon_0$.
   (a) Consider the special case where $\Pr(\varepsilon_0 = 1) = \Pr(\varepsilon_0 = -1) = 1/2$. What is distribution of X_t? Are the (X_t) independant? Is (X_t) a stationary process?
   (b) More generally, compute the covariance function of (X_t). Provide a simple case for which X_0 and X_1 are not independant.
   (c) In the general case, is (X_t) a stationary process?

(7) **(**)** Let $X = (X_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ be the time series defined by $X_t = A\cos\left(\frac{\pi t}{3}\right) + B\sin\left(\frac{\pi t}{3}\right)$ where A are B are two zero mean indépendant r.v. with variance σ^2. Show that X is second order stationary process. Compute its autocovariance and its spectral density.

(8) **(**)** Let $(\varepsilon_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ be a Gaussian white noise with variance σ^2. Define the time series $(X_t^{(m)})_{t\in\mathbb{Z}}$ by $X_t^{(m)} = \displaystyle\sum_{k=0}^{m} \theta^k \varepsilon_{t-k}$ for any $t \in \mathbb{Z}$, with $-1 < \theta < 1$ and $m \in \mathbb{N}$.
   (a) Prove that $(X_t^{(m)})_{t\in\mathbb{Z}}$ is a Gaussian process.
   (b) Establish that $(X_t^{(m)})_{t\in\mathbb{Z}}$ is a centered stationary process. Deduce $\mathrm{var}\,(X_t^{(m)})$.
   (c) Show that for any $t \in \mathbb{Z}$, the sequence of rv $(X_t^{(m)})_m$ converge in $\mathbb{L}^2$ when $m \to \infty$. Denote $X_t^{(\infty)}$ this limit.
   (d) Using the sequence of probability density, show that $(X_t^{(\infty)})_t$ is a Gaussian centered stationary process satisfying $X_{t+1}^{(\infty)} = \theta\, X_t^{(\infty)} + \varepsilon_{t+1}$ for any $t \in \mathbb{Z}$.

(9) **(**)** Define the spectral density f of a second order stationary process $(X_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ by $f(\lambda) = a$ if $0 \le |\lambda| < \frac{\pi}{2}$ and $f(\lambda) = b$ if $\pi/2 \le \lambda \le \pi$ with $a \ne b$ two positive real numbers.
   (a) Compute the autocovariance $\gamma_X(k)$ for $k \in \mathbb{Z}$.
   (b) Verify that $\sum_{k\in\mathbb{Z}} |\gamma_X(k)| = \infty$ but $\sum_{k\in\mathbb{Z}} |\gamma_X(k)|^2 < \infty$.

(10) **(***)** Let $B_H = (B_H(t))_{t\in\mathbb{N}}$ such as B_H is a Gaussian centered process satisfying $B_H(0) = 0$ and for any $(s,t) \in \mathbb{N}^2$,

$$\mathbb{E}\left(B_H(t+s) - B_H(t)\right)^2 = \sigma^2\,|s|^{2H} \text{ where } H \in (0,1) \text{ and } \sigma > 0.$$

(we assume that such a process exists...).

(a) What is the probability distribution of $B_H(t)$ for any $t \in \mathbb{N}$.
(b) Compute the covariance function of B_H (consider differently the case $H = 0.5$).
(c) Denote $N_H(t) = B_H(t+1) - B_H(t)$ for $t \in \mathbb{N}$. Show that $N_H = (N_H(t))_{t\in\mathbb{N}}$ is a Gaussian stationary centered time series and provide its marginal distribution.
(d) What is the autocovariance $r_H(k)$ of N_H? What's happening when $H = 0.5$?
(e) Show that $\sum |r(k)| = \infty$ for $H > 0.5$. What can we say about the spectral density of N_H?

Feuille n^o 2:

Processus ARMA et extensions

(1) **(*)** Soit $(\varepsilon_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ un bruit blanc de variance 1. On considère les processus X et Y, où:

$$X_n = 0.7X_{n-1} + \varepsilon_n \text{ et } Y_n = -0.7Y_{n-1} + \varepsilon_n \text{ pour } n \in \mathbb{Z}.$$

Quels sont ces processus? Déterminer la densité spectrale et le corrélogramme (théorique) de ces processus. Que se passe-t-il si on rajoute la condition $X_0 = 0$?

(2) **(*)** Déterminer si les processus autorégressifs suivants sont stationnaires (inversibles) et causaux:
(a) $X_t + 0.2\,X_{t-1} - 0.48\,X_{t-2} = \varepsilon_t$;
(b) $X_t + 1.9\,X_{t-1} + 0.88\,X_{t-2} = \varepsilon_t + 0.2\,\varepsilon_{t-1} + 0.7\,\varepsilon_{t-7}$;
(c) $X_t + 0.6\,X_{t-1} = \varepsilon_t + 1.2\,\varepsilon_{t-1}$;
(d) $X_t + 1.8\,X_{t-1} + 0.81\,X_{t-2} = \varepsilon_t$;
(e) $X_t - 1.5\,X_{t-1} + 0.5\,X_{t-2} = \varepsilon_t - \varepsilon_{t-2}$;
(f) $X_t + 1.6\,X_{t-1} = \varepsilon_t - 0.4\,\varepsilon_{t-1} + 0.04\,\varepsilon_{t-2}$.

(3) **(**)** Soit $(\varepsilon_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ un bruit blanc gaussien de variance σ^2 et soit $X = (X_t)_{y\in\mathbb{Z}}$ le processus ARMA tel que: $X_t = aX_{t-1} + \varepsilon_t$ où $|a| > 1$.
(a) Montrer que X_t est donné par l'expression $X_t = -\sum_{j=1}^{\infty} a^{-j}\varepsilon_{t+j}$
(b) On définit $\omega_t = X_t - \frac{1}{a}X_{t-1}$. Montrer que $\omega_t \sim \mathcal{N}\left(0, \sigma_\omega^2\right)$. La famille $(\omega_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ est-elle un bruit blanc gaussien? Exprimer σ_ω^2 en fonction de a et σ^2 et montrer que X a la représentation causale (en fonction de ω_t): $X_t = \frac{1}{a}X_{t-1} + \omega_t$.

(4) **(**)** Soit (ε_n) un bruit blanc gaussien de variance σ^2. On considère les processus X et Y, où:

$$X_n = A\cos(\pi n/3) + B\sin(\pi n/3) + Y_n \text{ et } Y_n = \varepsilon_n + 2.5\varepsilon_{n-1} \text{ pour } n \in \mathbb{Z},$$

où A et B sont deux variables normales centrées réduites indépendantes et indépendantes des ε_n.
(a) Quel type de processus est Y? Tracer la densité spectrale et le corrélogramme (théorique) de Y. Déterminer la loi de Y_n pour $n \in \mathbb{Z}$.
(b) X a-t-il une tendance? une saisonnalité?
(c) Montrer que X est stationnaire et déterminer sa densité spectrale et son corrélogramme.
(d) Déterminer la loi de X_n pour $n \in \mathbb{Z}$.

(5) **(*)** Soit (ε_n) un bruit blanc de variance 1. On considère les processus X et Y, où:

$$X_n = X_{n-3} + \varepsilon_n \text{ et } Y_n = 0.999Y_{n-3} + \varepsilon_n \text{ pour } n \in \mathbb{Z}.$$

(a) Quel type de processus est Y? Tracer la densité spectrale et le corrélogramme (théorique) de Y.
(b) Montrer que X n'est pas stationnaire. Calculer $\rho(n) = \mathbb{E}\,X_0X_n$ pour $n \in \mathbb{N}$ et tracer $\rho(n)$ en fonction de n. Que remarque-t-on?
(c) Déterminer un filtre rendant X stationnaire (et non nul). Appliquer ce filtre à Y et déterminer la densité spectrale du processus filtré.

(6) **(**)** On considère le processus stationnaire centré $X = (X_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ vérifiant: $X_t - aX_{t-1} - a^2X_{t-2} = \varepsilon_t$ où $(\varepsilon_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ est un bruit blanc gaussien de variance σ^2.
(a) Pour quelles valeurs de a ce processus est-il causal?
(b) Pour une réalisation $x_1, \cdots, x_{200}$ de ce processus on observe $\hat{\gamma}(0) = 6.06$ et $\hat{\gamma}(1) = 4.16$. Trouver les estimations de a et de σ^2 en résolvant les équations de Yule-Walker (si il y

a plusieurs solutions, choisir la solution causal).

(7) **(*)** Soit deux observations x_1 et x_2 avec $|x_1| \neq |x_2|$ d'un processus AR(1) causal stationnaire satisfaisant $X_t = aX_{t-1} + \varepsilon_t$, où $(\varepsilon_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ est un bruit blanc gaussien de variance σ^2. Trouvez les estimateurs du maximum de vraisemblance de a et σ^2.

(8) **(**)** Trouver une équation de degré 3 vérifiée par l'estimateur du maximum de vraisemblance du paramètre a d'un processus AR(1) causal stationnaire satisfaisant $X_t = aX_{t-1} + \varepsilon_t$, où $(\varepsilon_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ est un bruit blanc gaussien de variance σ^2, si on suppose que l'on dispose des observations $(x_1, \cdots, x_n)$.

(9) **(***)** Soit (ε_n) un bruit blanc gaussien de variance σ^2. On considère le processus X, où:

$$X_n = X_{n-1} - 0.16\, X_{n-2} + \varepsilon_n - 0.2\, \varepsilon_{n-1} \text{ pour } n \in \mathbb{Z}$$

(a) Quel type de processus est X? Tracer sa densité spectrale.
(b) Déterminer les équations de Yule-Walker et en déduire l'expression du corrélogramme (théorique) de X.
(c) On suppose connu le corrélogramme empirique de X. En déduire un estimateur de σ^2.

(10) **(*)** Soit (ε_n) un bruit blanc gaussien de variance σ^2.
(a) Déterminer la densité spectrale et la fonction de covariance de ε (soit $r(k) = \mathbb{E}\,\varepsilon_0\varepsilon_k$ pour $k \in \mathbb{N}$).
(b) Calculer la log-vraisemblance exacte (c'est-à-dire $\log f_{(\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_n)}(x_1,..,x_n)$) en fonction de σ^2. Peut-on obtenir une expression simple de l'estimateur de σ^2 par maximum de vraisemblance?
(c) Écrire le contraste de Whittle pour le paramètre σ^2. Peut-on obtenir une expression simple de l'estimateur de σ^2 par minimum de contraste? Comparer avec l'expression précédente.

(11) **(**)** Soit (ε_n) un bruit blanc gaussien de variance σ^2. On considère le processus X, où:

$$X_n = \varepsilon_n - \theta\varepsilon_{n-1} \text{ pour } n \in \mathbb{N},$$

où $\theta \in]-1, 1[$.
(a) Quel type de processus est X? Déterminer sa densité spectrale et sa fonction de covariance (soit $r(k) = \mathbb{E}\, X_0 X_k$ pour $k \in \mathbb{N}$).
(b) Calculer la log-vraisemblance exacte (c'est-à-dire $\log f_{(X_1,\ldots,X_n)}(x_1,..,x_n)$) en fonction de σ^2 et θ (on écrira matriciellement cette expression). On notera $R(n)$ la matrice d'ordre n: $(r(j-i))_{1\le i,j\le n}$. Peut-on obtenir une expression simple de l'estimateur de (σ^2, θ) par maximum de vraisemblance?
(c) Écrire le contraste de Whittle pour les paramètres (σ^2, θ). Peut-on obtenir une expression simple de l'estimateur de (σ^2, θ) par minimum de contraste?
(d) Répondre au deux questions précédentes en supposant $\theta = 0.5$ connu (le paramètre à estimer est alors seulement σ^2).

(12) **(**)** Soit $(\varepsilon_n)_{n\in\mathbb{N}}$ un bruit blanc gaussien de variance σ^2 et soit $X = (X_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ le processus ARCH(1) défini par $X_t = \varepsilon_t \sqrt{1 + a\, X_{t-1}^2}$ pour $t \in \mathbb{Z}$, avec $0 \le a < 1$.
(a) X est-il gaussien? Centré?
(b) Montrer que $Y = (X_t^2)_{t\in\mathbb{Z}}$ est un processus ARMA.
(c) Déterminer l'expression de la vraisemblance conditionnelle de $(X_1, \cdots, X_n)$ sachant $X_0, X_{-1}, \ldots$, puis en déduire un estimateur de a par maximum de vraisemblance.

Feuille n^o 4:

Chaînes de Markov à espace d'état fini

(1) **(*)** Soit la chaîne de Markov homogène $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ à valeurs dans $E = \{0,1\}$ et telle que $\Pr(X_1 = 1 \,|\, X_0 = 0) = p$ et $\Pr(X_1 = 1 \,|\, X_0 = 1) = q$, où $p, q \in]0,1[$ sont inconnues.
   (a) Tracer le graphe associé à cette chaîne.
   (b) Déterminer la matrice de transition de (X_n).
   (c) On suppose que $X_0 = 0$. Déterminer la loi de probabilité de X_1.
   (d) Déterminer la mesure de probabilité μ invariante par X.
   (e) On suppose que X_0 à pour loi μ. Déterminer $\mathbb{E}\, X_n$ puis l'auto-covariance de X. Donner enfin la densité spectrale de X. Existe-t-il un processus ARMA ayant la même densité?
   (f) On suppose toujours que X_0 à pour loi μ et que $(X_1, \cdots, X_n)$ est observé. Déterminer l'expression des estimateurs $\widehat{p}_n$ et $\widehat{q}_n$. Vérifier que ces estimateurs convergent.

(2) **(*)** Soit la chaîne de Markov homogène $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ à valeurs dans $E = \{-1,0,1\}$ telle que $\mathbb{E}\, X_n = 0$ et

$$\begin{aligned}
&\Pr(X_1 = 1 \,|\, X_0 = 0) = \Pr(X_1 = -1 \,|\, X_0 = 0) = p \\
&\Pr(X_1 = 1 \,|\, X_0 = 1) = \Pr(X_1 = -1 \,|\, X_0 = -1) = q \\
&\Pr(X_1 = 1 \,|\, X_0 = 1) = 1/2,
\end{aligned}$$

avec $0 < p < 1/2$ et $0 < q < 1/4$.
   (a) Tracer le graphe associé à cette chaîne.
   (b) Déterminer la matrice de transition de (X_n).
   (c) On suppose que $X_0 = 0$. Déterminer la loi de probabilité de X_1.
   (d) Existe-t-il des états absorbants pour cette chaîne?
   (e) Déterminer la ou les mesures de probabilité invariantes par X.

(3) **(**)** Reprendre l'exercice précédent en traitant le cas $p = 1/2$ et $q < 1/4$, puis le cas $p = 2q = 1/2$.

(4) **(**)** Soit la chaîne de Markov homogène $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ à valeurs dans $E = \{0,1,\cdots,m\}$, où $m \geq 2$ telle que pour tout $k \in \{1,\cdots,m-1\}$,

$$\begin{aligned}
&\Pr(X_1 = k+1 \,|\, X_0 = k) = 1 - \Pr(X_1 = 0 \,|\, X_0 = k) = p \\
&\Pr(X_1 = 0 \,|\, X_0 = m) = \Pr(X_1 = 1 \,|\, X_0 = 0) = 1.
\end{aligned}$$

   (a) Tracer le graphe associé à cette chaîne.
   (b) Déterminer la matrice de transition de (X_n).
   (c) On suppose que $X_0 = 0$. Déterminer la loi de probabilité de X_1, puis celle de X_2.
   (d) Existe-t-il des états absorbants pour cette chaîne?
   (e) Déterminer la ou les mesures de probabilité invariantes par X.
   (f) La chaîne converge-t-elle en loi quand $n \to \infty$?

Feuille n^o 5:
Prédiction

(1) **(*)** Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ un processus stationnaire d'espérance m et de covariance $r(\cdot)$. Montrer que le prédicteur optimal au sens des moindres carrés de X_{n+h} de la forme aX_n+b s'obtient avec $a=r(h)$ et $b=m(1-r(h))$.

(2) **(**)** Soit la chaîne de Markov $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ à valeur dans $\{x_1,x_2\}$ et de matrice de transition $Q=(q_{ij})_{1\le i,j\le 2}$. Déterminer la prédiction optimale au sens des moindres carrés de X_{n+1} et X_{n+2} connaissant $(X_0,X_1,\cdots,X_n)$.

(3) **(**)** Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ le processus MA(1) stationnaire défini par

$$X_n=\varepsilon_n-\theta\varepsilon_{n-1},\ \text{pour } n\in\mathbb{Z},$$

avec $|\theta|<1$ et (ε_n) un bruit blanc gaussien de variance σ^2. Montrer que le prédicteur linéaire optimal $\widehat{X}_{n+1}$ au sens des moindres carrés de X_{n+1} à partir de $\{X_{n-j},j\in\mathbb{N}\}$ est :

$$\widehat{X}_{n+1}=-\sum_{j=1}^{\infty}\theta^j X_{n+1-j}.$$

Calculer l'erreur quadratique moyenne de ce prédicteur.

(4) **(**)** Dans le modèle de l'exercice précédent, on suppose que X_1, X_2, X_4 et X_5 sont connus, mais pas X_3. Déterminer le prédicteur linéaire optimal $\widehat{X}_3$ au sens des moindres carrés de X_3 à partir de (X_1,X_2), puis à partir de (X_4,X_5) et enfin à partir de (X_1,X_2,X_4,X_5). Calculer à chaque fois l'erreur quadratique moyenne de ce prédicteur.

(5) **(**)** Répondre aux mêmes questions dans le cas du modèle

$$X_n=\phi X_{n-1}+\varepsilon_n,\ \text{pour } n\in\mathbb{Z},$$

où $|\phi|<1$ et (ε_n) un bruit blanc gaussien de variance σ^2.

(6) **(***)** Soit le processus $X=(X_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ tel que $X_k=ak+b+\varepsilon_k$. On suppose que $(X_A,\cdots,X_n)$ est connue mais a et b sont inconnus. On estime a et b par moindres carrés ordinaires.
  (a) Si (ε_n) est un bruit blanc gaussien de variance σ^2, déterminer une prédiction $\widehat{X}_{n+1}$ et donner son erreur quadratique moyenne. Que se passe-t-il quand $n\to\infty$?
  (b) Si (ε_n) est un processus MA(1) de paramètre ϕ connu et de variance σ_ε^2, déterminer une prédiction $\widehat{X}_{n+1}$ et donner son erreur quadratique moyenne. La prédiction est-elle "meilleure" que dans le cas précédent?
  (c) Que faire si maintenant ϕ est inconnu?