

# Une Approche Mathématique de la Substance de Spinoza.

Mohammed Bachir

Université Paris 1 (Laboratoire SAMM EA 4545)

29 septembre 2018

**"Tout homme a deux philosophies, la sienne et celle de Spinoza"** Henri Bergson

- I. Le concept de substance chez Spinoza.
- II. Une approche mathématique de la substance .

<http://hal-paris1.archives-ouvertes.fr/hal-01420747/fr/>

## Partie

### I.1. **Oeuvre principale de Spinoza : L'ETHIQUE.**

- Partie 1 : De Dieu
- Partie 2 : De la nature et de l'origine de l'Esprit
- Partie 3 : De l'origine et de la nature des Sentiments
- Partie 4 : De la Servitude humaine ou des Forces des Sentiments
- Partie 5 : De la Puissance de l'Entendement ou de la Liberté humaine

### I.2. Les définitions de Spinoza

- PAR CAUSE DE SOI, J'ENTENDS CE DONT L'ESSENCE ENVELOPPE L'EXISTENCE, AUTREMENT DIT CE DONT LA NATURE NE PEUT ÊTRE CONÇUE SINON COMME EXISTANTE. (**Définition I.**)
- PAR SUBSTANCE, J'ENTENDS CE QUI EST EN SOI ET EST CONÇU PAR SOI, C'EST-À-DIRE CE DONT LE CONCEPT N'A PAS BESOIN DU CONCEPT D'UNE AUTRE CHOSE. (**Définition III.**)
- PAR ATTRIBUT, J'ENTENDS CE QUE L'ENTENDEMENT PERÇOIT DE LA SUBSTANCE COMME CONSTITUANT SON ESSENCE. (**Définition IV.**)
- PAR MODE, J'ENTENDS LES AFFECTIONS DE LA SUBSTANCE, AUTREMENT DIT CE QUI EST EN AUTRE CHOSE, PAR QUOI IL EST AUSSI CONÇU. (**Définition V.**)
- PAR DIEU, J'ENTENDS UNE SUBSTANCE CONSISTANT EN UNE INFINITÉ D'ATTRIBUT, DONT CHACUN EXPRIME UNE ESSENCE ÉTERNELLE ET INFINIE (**Définition VI.**).

### I.3. PROPOSITION XI de l'Ethique.

**PROPOSITION XI : Dieu, autrement dit une substance consistant en une infinité d'attributs, dont chacun exprime une essence éternelle et infinie, existe nécessairement.**

**PROPOSITION XIV : Excepté Dieu, nulle substance ne peut être donnée ni conçue.**

- La stratégie utilisée par Spinoza ?
- Les preuves de la Propositions XI. données par Spinoza ? (Trois mais fausses)

**I.4. Le point de départ de Spinoza : Dans la nature il n y a que des substances et leur modes (Axiome ).**

- AXIOME I. – TOUTES LES CHOSES QUI SONT, SONT OU BIEN EN SOI, OU BIEN EN AUTRE CHOSE.

**Début de preuve de Proposition IV : " Toutes les choses qui sont, sont ou bien en soi, ou bien en autre chose (selon l'axiome 1), c'est-à-dire (selon les définitions 3 et 5) que rien n'est donné hors de l'entendement, à part les substances et leurs affections... "**

#### IV. À la nature de la substance, il appartient d'exister.

- PROPOSITION VII : **À la nature de la substance, il appartient d'exister.**

DÉMONSTRATION : Une substance ne peut être produite par autre chose (selon la PROPOSITION VI); **elle sera donc cause de soi**, c'est-à-dire (selon la définition 1) que son essence enveloppe nécessairement l'existence, autrement dit il appartient à sa nature d'exister. C.Q.F.D.

La Proposition VII doit donc être comprise comme suit :

- **PROPOSITION VII BIS** : **Si** *une substance est donnée dans la nature (et non pas imaginée par l'esprit)*, **alors** *à la nature de cette substance, il appartient d'exister. Autrement dit, la substance est nécessairement cause de soi.*

## I.6. L'erreur dans la Démonstration 1. de Spinoza

PROPOSITION XI : Dieu, autrement dit une substance consistant en une **infinité d'attributs**, dont chacun exprime une essence éternelle et infinie, existe nécessairement.

- Axiome VII : Tout ce qui peut être conçu comme non existant, son essence n'enveloppe pas l'existence.
- PROPOSITION VII : **À la nature de la substance, il appartient d'exister.**
- PROPOSITION VII BIS : **Si** *une substance est donnée dans la nature (non pas imaginée par l'esprit)*, **alors** *à la nature de cette substance, il appartient d'exister.*
- DÉMONSTRATION 1 : Si vous niez cela, concevez, s'il est possible, que Dieu n'existe pas. Donc (selon l'axiome 7) son essence n'enveloppe pas l'existence. Or (selon la proposition 7) cela est absurde : donc Dieu existe nécessairement. C.Q.F.D.
- **L'erreur se trouve dans le fait qu'on ne peut pas appliquer la Proposition VII, vu que Spinoza suppose par l'absurde que la substance Dieu n'existe pas. Cela se voit mieux en considérant plutôt la proposition VII Bis.**

## I.6. L'erreur dans la Démonstration 2. de Spinoza

- PASSAGE ERRONÉ DE LA DÉMONSTRATION 2 :  
  
« Si donc nulle raison ni cause ne peut être donnée qui empêche que Dieu n'existe, ou qui lui enlève l'existence, il faut conclure pleinement qu'il existe nécessairement. »
  
- Ce passage est clairement contredit par les théorèmes d'incomplétudes de Kurt Gödel (1931).



### II.1 Une approche mathématique : Trois axiomes et une définition.

#### Une redéfinition de la substance :

- Une substance est une chose  $S$  (si elle existe) qui est cause de soi :  $\mathcal{C}(S) = S$ . Autrement dit, une chose dont il appartient à sa nature d'exister.

#### Trois axiomes :

- (A1) Toute chose existante est l'effet d'une cause bien déterminée (**toujours sous entendue non vide**) et l'effet ne peut pas précéder sa cause. (Voir aussi les axiomes de l'Ethique).
- (A2) La cause du tout doit envelopper la cause de la partie. (Cet axiome ne se trouve pas dans l'Ethique).
- (A3) Si deux substances existent et sont différentes, alors elles n'ont rien de commun entre elles. (Proposition II. de l'Ethique)

**Théorème : Il existe une unique Substance  $S \neq \emptyset$  dans le monde de l'existant.**

Lundi 09/04/2018

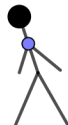
 $t=00h00min00s$ 

$$t_2 < t_1$$

$$t_1 < t$$

 $E_{t_2}$  $E_{t_1}$  $E_t$ 

l'ensemble  
de tout ce qui a existé  
avant l'instant  $t$ .



## II.2 Modélisation : Traduction mathématique des axiomes.

- Le temps est modélisé par la droite réelle  $\mathbb{R}$ . Soit un instant  $t \in \mathbb{R}$ .
- $E_t = \{\text{choses ayant existé avant l'instant } t\}$ .
- "Le monde le l'existant"  $:= \cup_{t \in \mathbb{R}} E_t$ .
- $\mathcal{P}(E_t) = \{\text{parties de } E_t\}$ .
- Par l'axiome 1 : il existe une **application** (la loi de causalité)

$$\begin{aligned} \mathcal{C} : \mathcal{P}(E_t) &\longrightarrow \mathcal{P}(E_t) \setminus \{\emptyset\} \\ A &\mapsto \mathcal{C}(A) = \text{La cause de } A \end{aligned}$$

- Par l'axiome 2 : Si  $A \subset B$  alors  $\mathcal{C}(A) \subset \mathcal{C}(B)$ , autrement dit, la loi de causalité est **croissante**.

## II.2 Le théorème de Knaster-Tarski.

**Théorème de Knaster-Tarski (1928)** : Soit  $E$  un ensemble et  $f : \mathcal{P}(E) \rightarrow \mathcal{P}(E)$  une **application croissante** (pour l'ordre de l'inclusion). Alors, il existe une partie  $S$  et une partie  $D$  de  $E$  (mais il est possible que  $S = D$ ) tels que

$$f(S) = S \text{ et } f(D) = D.$$

De plus, s'il existe une autre partie  $\Lambda$  tel que  $f(\Lambda) = \Lambda$ , alors nécessairement

$$S \subset \Lambda \subset D.$$

## II.3 Existence et unicité de la Substance : preuve mathématique.

D'après les axiomes (A1) et (A2), la loi de causalité

$$\begin{aligned} \mathcal{C} : \mathcal{P}(E_t) &\longrightarrow \mathcal{P}(E_t) \setminus \{\emptyset\} \\ A &\mapsto \mathcal{C}(A) = \text{La cause de } A \end{aligned}$$

est une application croissante.

- En utilisant le théorème de Knaster-Tarski : pour tout instant  $t \in \mathbb{R}$ , il existe une substance  $S_t \in \mathcal{P}(E_t) \setminus \{\emptyset\}$ , c'est-à-dire tel que  $\mathcal{C}(S_t) = S_t \neq \emptyset$ . Si  $\Lambda_t$  est une autre substance de  $\mathcal{P}(E_t)$ , alors  $S_t \subset \Lambda_t$
- Grâce à l'axiome (A3) on a que  $S_t = \Lambda_t$ , d'où l'unicité de  $S_t$  dans  $E_t$ ,  $\forall t$  fixé.
- On montre facilement que  $S = S_t$  pour tout instant  $t$ , i.e.  $S$  est indépendante du temps.

## II.4. Conclusion.

Il existe une unique substance  $S$  dans le monde de l'existant.

**Avantages de l'approche mathématique :**

- Contrairement à l'approche Spinoziste (mais aussi chez les philosophes "des substances"), ici l'existence de la substance n'est pas un axiome mais elle est démontrée en même temps que l'unicité.
- L'approche mathématique s'appuie sur uniquement trois axiomes naturels et inspirés des lois de la physique.
- Cette approche donne un fondement plus solide à l'Ethique de Spinoza, puisque les démonstrations de l'existence de la substance fourni par Spinoza s'avèrent fausses.
- Pour conserver la forme de l'Ethique I, rien n'empêche d'associer à la substance  $S$  (dont on sait désormais qu'elle existe et est unique), des attributs :

$$\mathcal{T} := \{ \text{des attributs de } S \}$$

## II.5. Une représentation métaphorique de la substance.

Partie noire:  
Inaccessible pour l'esprit  
(hors entendement)



Partie blanche:  
Lieu d'existence  
des choses =  $\emptyset$

$S = \text{Substance / Sablier}$   
 $C(S) = S$

## II.5. Une représentation métaphorique de la substance.

Partie noire : hors entendement

$t=0$  (l'instant du Big Bang)

$t= 13$  milliards d'années plus tard  
(Partie verte : espace-temps  
de la physique)

