Université de Cergy-Pontoise *UFR économie et gestion*

L2 DU ECE & CMI EF, 2019 - 2020

Probabilités
Correction examen du 09 janvier 2020

Exercice (12 pts)

1. Désignons par B l'ensemble des r boules et par T l'ensemble des n tiroirs.
   (a) Cela correspond au nombre d'applications de B vers T où l'image d'une boule est le tiroir contenant la boule ; il vaut n^r. **(0.5pt)**.
   (b) C'est le nombre d'applications injectives de B dans T ; il vaut A_m^p **(1pt)**.
   (c) On choisit les deux tiroirs pour la répartition ($\binom{n}{2}$ possibilités), pour chaque choix ainsi fait, on répartit les r boules seulement dans les deux tiroirs choisis en excluant les deux répartitions où toutes les boules sont dans l'un (i.e. l'autre vide) ($2^r - 2$ possibilités). Ainsi, le nombre de répartitions dans ce cas est $\binom{n}{2}(2^r - 2)$. **(2pts)**
2. Pour une pièce donnée, considérons les événements : B : "elle est bonne" ; D : "elle est déclarée défectueuse par le système". On a $P(B) = 0,9$; $P(\overline{D}|\overline{B}) = 0,05$; $P(D|B) = 0,02$.
   (a) Par la formule des probabilités totales ; on a $P(D) = P(D|B)P(B) + P(D|\overline{B})P(\overline{B}) = P(D|B)P(B) + \big(1 - P(\overline{D}|\overline{B})\big)P(\overline{B}) = 0,02 \times 0,9 + (1 - 0,05) \times 0,1 = 0,113.$ **(1pt)**
   (b) On a $P(B|D) = \frac{P(B\cap D)}{P(D)} = \frac{P(D|B)P(B)}{P(D)} = \frac{0,02\times 0,9}{0,113} \approx 0,16.$ **(1.5pt)**
3. (a) En utilisant la continuité de F, on a $a = F(2) = \lim_{x\to 2} F(x) = 1$. D'où $a = 1$. De plus, on $1 = \lim_{x\to+\infty} F(x) = b$. D'où $b = 1$. **(0.5×2pt)**
   (b) On dérive la fonction de répartition et on trouve la densité de X $f(x) = \frac{1}{2}x\mathbb{1}_{[0,2]}(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}x & \text{si } 0 \le x \le 2 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$. **(1pt)**
   (c) On a $P(X > 1) = 1 - P(X \le 1) = 1 - F(1) = 1 - (\frac{1}{2})^2 = \frac{3}{4}$. **(0.5pt)**
   (d)
   - $E(X) = \int_{\mathbb{R}} tf(t)dt = \frac{1}{2}\int_0^2 t^2 dt = \big[\frac{1}{2} \times \frac{1}{3}t^3\big]_0^2 = \frac{4}{3}$.
   - $E(X^2) = \int_{\mathbb{R}} t^2 f(t)dt = \frac{1}{2}\int_0^2 t^3 dt = \big[\frac{1}{2} \times \frac{1}{4}t^4\big]_0^2 = 2$.
   - Var(X)= $E(X^2) - \big(E(X)\big)^2 = 2 - \big(\frac{4}{3}\big)^2 = \frac{2}{9}$. **(0.5×3pt)**

Problème (13 pts)

Soient les événements :
A_i : "le client c_i s'intéresse au produit", $i = 1, \cdots, n$;
B_k : "exactement k clients s'intéressent au produit", $k = 1, \cdots, n$.
On déduit de l'énoncé que pour tout $i = 1, \cdots, n$, $P(A_i) = p$ et que les événements A_i sont mutuellement indépendants.

1. (a) La probabilité que tous les clients s'intéressent au produit est

$$\begin{aligned} P(A_1 \cap \cdots \cap A_n) &= P(A_1) \times \cdots \times P(A_n) \text{ car les } A_i \text{ sont mutuellement indépendants} \\ &= p^n \textbf{ (0.5pt)}. \end{aligned}$$

(b) La probabilité qu'au moins un client s'intéresse au produit est

$$P(\bigcup_{i=1}^{n} A_i) = 1 - P(\bigcap_{i=1}^{n} \overline{A}_i) = 1 - P(B_0) = 1 - (1-p)^n \ \textbf{(0.5pt)}.$$

(c)
- Par la question précédente, on déduit que la probabilité qu'aucun client ne s'intéresse au produit est $(1-p)^n$.
- Déterminons la probabilité qu'exactement un seul client s'intéresse au produit. La probabilité que seulement un seul client fixé (par exemple c_1) s'intéresse au produit est $P(A_1 \cap \overline{A}_2 \cap \cdots \cap \overline{A}_n) = P(A_1) \times P(\overline{A}_2) \times \cdots \times P(\overline{A}_n) = p(1-p)^{n-1}$. En tenant compte des $\binom{n}{1} = n$ possibilités de choisir le client, on obtient $np(1-p)^{n-1}$.

D'où la probabilité qu'au plus un client s'intéresse au produit est $(1-p)^n + np(1-p)^{n-1}$. **(1.5pt)**

(d) La probabilité que les clients $c_{i_1}, c_{i_2}, \cdots, c_{i_k}$ s'intéressent au produit est

$$P(A_{i_1} \cap \cdots \cap A_{i_k}) = P(A_{i_1}) \times \cdots \times P(A_{i_k}) = p^k. \ \textbf{(0.5pt)}$$

(e) La probabilité que **seuls** les clients $c_{i_1}, c_{i_2}, \cdots, c_{i_k}$ s'intéressent au produit est

$$P(A_{i_1} \cap \cdots \cap A_{i_k} \cap \overline{A}_{j_1} \cap \cdots \cap \overline{A}_{j_{n-k}}) = P(A_{i_1}) \times \cdots \times P(A_{i_k}) \times P(\overline{A}_{j_1}) \times \cdots \times P(\overline{A}_{j_{n-k}}) = p^k(1-p)^{n-k}$$

où les $j_1, \cdots, j_{n-k}$ représentent les numéros des (n-k) clients qui ne s'intéressent pas au produit.
Comme il y a $\binom{n}{k}$ possibilités de choisir les clients $c_{i_1}, c_{i_2}, \cdots, c_{i_k}$, on déduit que la probabilité qu'exactement k clients s'intéresse au produit est

$$P(B_k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

avec $P(B_k) = 0$ si $k > n$. **(1.5pts)**

2. $X_i \sim \mathcal{B}(p)$ pour tout $i = 1, \cdots, n$. **(0.5pt)**

3. X est la variable aléatoire representant le nombre de clients qui s'intéressent au produit. Ainsi,
   - $X(\Omega) = \{0, 1, 2 \cdots, n\}$;
   - on déduit de la question 4. de la Partie A que $P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$ pour tout $k \in \{0, 1, 2 \cdots, n\}$.

   Par conséquent, $X \sim \mathcal{B}(n, p)$.
   Ainsi, $E(X) = np$ et $Var(X) = np(1-p)$ **(0.5× 3 pt)** .

4. On veut calculer $P(X \geq 2 | X \geq 1)$. On a

$$\begin{aligned} P(X \geq 2 | X \geq 1) &= \frac{P\big((\{X \geq 2\}) \cap (\{X \geq 1\})\big)}{P(X \geq 1)} = \frac{P(X \geq 2)}{P(X \geq 1)} = \frac{1 - P(X < 2)}{1 - P(X < 1)} \\ &= \frac{1 - P(X = 0) - P(X = 1)}{1 - P(X = 0)} = \frac{1 - (1-p)^n - np(1-p)^{n-1}}{1 - (1-p)^n}. \ \textbf{(1.5pts)} \end{aligned}$$

5. (a) La probabilité qu'il n'y ait pas rupture de stock pour un jour donné est

$$\begin{aligned}
P(X \leq n-2) = 1 - P(X > n-2) &= 1 - P(X = n-1) - P(X = n) \\
&= 1 - \binom{n}{n-1} p^{n-1}(1-p)^{n-(n-1)} - \binom{n}{n} p^n (1-p)^{n-n} \\
&= 1 - np^{n-1}(1-p) - p^n. \ \mathbf{(1.5pts)}
\end{aligned}$$

(b) Z peut être considérée comme le nombre de succès obtenus au cours de 365 épreuves (mutuellement indépendantes) avec pour probabilité de succès $p_0 := P(X \leq n-2) = 1 - np^{n-1}(1-p) - p^n$. Donc $Z \sim B(365, p_0)$. **(1.5pts)**

(c) La probabilité qu'il n'y ait pas rupture de stock sur cette période d'un an est

$$P(Z = 365) = \binom{365}{365} p_0^{365}(1-p_0)^{365-365} = p_0^{365}. \ \mathbf{(1pt)}$$