Université de Cergy-Pontoise *UFR économie et gestion*

L2 DU ECE & CMI EF, 2018 - 2019

Probabilités
Correction Contrôle N°1 du 23 octobre 2018

Exercice 1 (5 pts)

1. Soit E l'ensemble des 400 pièces et A (resp. B) l'ensemble des pièces ayant le défaut A (resp. B). On a $\mathrm{Card}(A \cup B) = 40$, $\mathrm{Card}(\overline{A}) = 370$ (i.e. Card(A) = 30) et $\mathrm{Card}(B) = 20$.
   (a) On a $\overline{A} = \overline{A} \cap E = \overline{A} \cap (B \cup \overline{B}) = (\overline{A} \cap B) \cup (\overline{A} \cap \overline{B})$. Donc $\mathrm{Card}(B \cap \overline{A}) = \mathrm{Card}(\overline{A}) - \mathrm{Card}(\overline{A} \cap \overline{B}) = \mathrm{Card}(\overline{A}) - \mathrm{Card}(\overline{A \cup B}) = 370 - (400 - 40) = 10$. **(1pts)**
   (b) $\mathrm{Card}(A \cap \overline{B}) = \mathrm{Card}(A \setminus B) = \mathrm{Card}(A) - \mathrm{Card}(A \cap B)$. Or, $\mathrm{Card}(A \cap B) = \mathrm{Card}(A) + \mathrm{Card}(B) - \mathrm{Card}(A \cup B) = 30 + 20 - 40 = 10$. D'où $\mathrm{Card}(A \cap \overline{B}) = 30 - 10 = 20$. **(1,5pt)**

2. Chaque groupe aura 19 étudiants. Une répartition se fait en choisissant 19 étudiants parmi les 38 ($\binom{38}{19}$ possibilités) pour former un groupe, et pour chacun de ces choix, le reste des 19 étudiants forme l'autre groupe (une possibilité). Ainsi, il y a $\binom{38}{19}$ possibilités de former de tels groupes. **(2.5pts)**

Exercice 2 (7 pts)

1. Un comité est une combinaison à 3 éléments de l'ensemble des $2n$ étudiants. Le nombre de comités possibles que l'on peut former est $\binom{2n}{3}$ **(1pt)**.

2.
   - Avec chacune des classes, on peut former $\binom{n}{3}$ comités. Le nombre de comités que l'on peut former ne comportant que des étudiants de la même classe est donc $2\binom{n}{3}$ **(1,5pts)**.
   - Pour former un tel comité, on choisit la classe qui doit contenir 2 étudiants ($\binom{2}{1}$ possibilités), pour chaque classe ainsi choisie, on choisit 2 étudiants dans la classe ($\binom{n}{2}$ possibilités), pour chaque choix ainsi fait, on choisit un étudiant dans l'autre classe ($\binom{n}{1}$ possibilités). Le nombre de comités que l'on peut ainsi former est $\binom{2}{1}\binom{n}{2}\binom{n}{1} = 2n\frac{n!}{2!(n-2)!} = n^2(n-1)$ **(2pts)**.

3. Dans ce cas, il reste à choisir le 3ème étudiant parmi les $2n - 2$ étudiants restants ($\binom{2n-2}{1}$ possibilités). Le nombre de comités possibles que l'on peut former dans ce cas est $\binom{2n-2}{1} = 2n-2$ **(2,5pts)**.

Exercice 3 $(11,5$ pts)
Posons $E = \{b_1, \cdots, b_n\}$.

1. (a) Un résultat est une p-listes d'éléments de E. Donc, il y a n^p résultats possibles. **(1pt)**

   Dans la suite, on considère l'univers des possibles Ω l'ensemble de p-listes d'éléments de E ; $\mathrm{Card}(\Omega) = n^p$; on prend $\mathcal{A} = \mathcal{P}(\Omega)$; et comme le tirage s'effectue au hasard, il y a équiprobabilité.

(b) Soit l'événement A : "on n'obtient pas la boule b_1". Un élément de A s'obtient en effectuant le tirage dans les boules autres que b_1 ; donc $\text{Card}(A) = (n-1)^p$. D'où $P(A) = \frac{\text{Card}(A)}{\text{Card}(\Omega)}) = \frac{(n-1)^p}{n^p}$. **(1,5pts)**

(c) Soit l'événement B : "on obtient au moins une des boules b_1 ou b_2". $\overline{\text{B}}$ est l'événement : "on n'obtient aucune des boules b_1 ou b_2". Un élément de $\overline{\text{B}}$ s'obtient en effectuant le tirage dans les boules autres que b_1 et b_2 ; donc $\text{Card}(\overline{\text{B}}) = (n-2)^p$ et $P(\overline{\text{B}}) = \frac{\text{Card}(\overline{\text{B}})}{\text{Card}(\Omega)}) = \frac{(n-2)^p}{n^p}$. D'où $P(B) = 1 - P(\overline{\text{B}}) = 1 - \frac{(n-2)^p}{n^p}$. **(1,5pts)**

(d) Soit l'événement C : "le plus grand numéro obtenu soit inférieur ou égal à 3". Un élément de C s'obtient en effectuant le tirage dans les boules $\{b_1, b_2, b_3\}$. Ainsi, $\text{Card}(C) = 3^p$ et $P(C) = \frac{\text{Card}(C)}{\text{Card}(\Omega)}) = \frac{3^p}{n^p}$. **(1.5pts)**

2. (a) Un tel résultat s'obtient en effectuant le tirage soit dans les boules blanches (6^3 possibilités), soit dans les boules rouges (4^3 possibilités). Ainsi, il y a $6^3 + 4^3$ ($= 280$) résultats possibles dans ce cas. **(1.5pts)**

(b) Un tel résultat est obtenu soit avec le numéro 1 (2^3 possibilités ; car on prélève dans l'ensemble des deux boules blanche et rouge numérotées 1), soit avec le numéro 2 (2^3 possibilités), soit avec le numéro 3 (2^3 possibilités), soit avec le numéro 4 (2^3 possibilités), soit avec le numéro 5 (une possibilité ; car il y a une seule boule numérotée 5), soit avec le numéro 6 (une possibilité). Le nombre de résultats possibles dans ce cas est $2^3 + 2^3 + 2^3 + 2^3 + 1 + 1$; i.e. 34 possibilités. **(2pts)**

(c) Soit l'événement D : "obtenir au moins une des boules blanche". $\overline{\text{D}}$ est l'événement : "on n'obtient aucune boule blanche". Un élément de $\overline{\text{D}}$ s'obtient en effectuant le tirage dans les boules rouges ; donc $\text{Card}(\overline{\text{D}}) = 4^3$ et $P(\overline{\text{D}}) = \frac{\text{Card}(\overline{\text{D}})}{\text{Card}(\Omega)}) = \frac{4^3}{10^3}$. D'où $P(D) = 1 - P(\overline{\text{D}}) = 1 - \frac{4^3}{10^3}$. **(1,5pt)**

(d) Soit l'événement E : "obtenir au plus deux boules rouges". $\overline{\text{E}}$ est l'événement : "obtenir 3 boules rouges" i.e. le tirage se fait dans les boules rouges. Ainsi, $\overline{\text{E}} = \overline{\text{D}}$ et donc $P(E) = 1 - P(\overline{\text{E}}) = 1 - P(\overline{\text{D}}) = 1 - \frac{4^3}{10^3}$. **(1pt)**