Université Paris I, Panthéon - Sorbonne

Deuxième Année Licence M.I.A.S.H.S. 2016 – 2017

TP de Méthodes Numériques n^0 2 : Initiation au logiciel R, vecteurs et matrices

Le FORTRAN qui est une des bases de R travaille essentiellement avec des vecteurs et des matrices. Ces objets et les opérations possibles sur eux sont l'objet de ce TP. Bien maîtriser les vecteurs et matrices permettra fréquemment d'éviter les boucles dans les programmes et ainsi de gagner beaucoup de temps de calcul...

Retour sur l'algèbre linéaire...

$A = matrix(1, 3, 8)$	Création d'une matrice A d'ordre $(3, 8)$ ne contenant que des 1
$A[2, 7] = 3$	Changement d'une composante de A
A	Résultat
$t(A)$	Transposée de la matrice A
$B = cbind(c(4, 2, -3), c(2, 9, 0), c(-1, 0, 1))$	Définition d'une matrice "à la main"
B	Résultat
$C = solve(B)$	Inverse de la matrice
C	Résultat
$B\% * \%C$	Multiplication de matrice. Résultat surprenant?
$B * C$	Autre multiplication: qu'est-il fait?
$B\% * \%A$	Multiplcation de 2 matrices de tailles différentes
$D = C[c(1 : 3), 2]$	Définition d'un nouveau vecteur
$sort(D)$	Pour mettre dans l'ordre croissant les composantes de D
$sort(D) * D$	Une première multiplication
$abs(D)\hat{\ }3.2$	Une autre opération
$cos(D)$	Encore une autre
$E = D\% * \%t(D)$	Crée une matrice à partir de D
$ptm = proc.time()[1]$	Mise en route d'un compteur du temps CPU "utilisateur"
$solve(E)$	Tentative d'inversion. Pourquoi?
$proc.time()[1] - ptm$	Arrêt du compteur et temps écoulé (en secondes).

Nous avons utilisé des fonctions préprogrammées pour travailler sur des matrices: inverser, calculer un déterminant,... Ce sont pour nous des sortes de boîtes noires. Il y a derrière ces fonctions des algorithmes, optimisés en temps de calcul, qui permettent d'obtenir de tels résultats (qui sont donnés avec une certaine approximation). Nous verrons en particulier dans un TP suivant l'algorithme de Gauss qui fonde certaines d'entre elles.

Exercices

1. Construire un vecteur $V = (2, 4, 6, \cdots, 20)$ et un vecteur W de longueur 10 ne contenant que des -1.
   Effectuer le produit scalaire euclidien classique de V et W (soit $\sum_i V_i W_i$).
   Construire une matrice M de dimension (10×2) à partir de ces 2 vecteurs.
   Construire une nouvelle matrice H en remplaçant les 2 premières lignes de M par des 0.
   Calculer $M + 2$, $2 \times M$, $M \times 2$, $M/5$, $M + H$.
   Supprimer les lignes 4 et 5 de M.
   Inverser l'ordre des lignes de M.
   Mettre les composantes de la première ligne dans un ordre croissant.

2. Construire une matrice M de taille (3×3) quelconque, inversible. Calculer son déterminant (help de det). Calculer son inverse H. Calculer $H \times M$ et $M \times H$. Calculer le déterminant de H. Vaut-il l'inverse de celui de M?

3. Construire une matrice M de taille (2×2) dont les valeurs propres valent 1 et 0. Déterminer une base du noyau et de l'image de M. Pour un vecteur X quelconque de $\mathbb{R}^2$, calculer MX et M^2X. Soit V_1 et V_2 des vecteurs du

noyau et de l'image de M. Vérifier que (V_1, V_2) forment une base de $\mathbb{R}^2$. Calculer les coordonnées de X dans cette base.

4. En utilisant les commandes $M = runif(n\wedge 2, 0, 1)$ puis $N = matrix(M, n, n)$, on peut générer une matrice carrée de taille n dont les composantes sont des nombres qui approchent des réalisations indépendantes de loi uniforme sur $[0, 1]$. Vous serez capable de montrer après le premier semestre de L3 qu'une telle matrice M est presque sûrement inversible et diagonalisable. Faîtes un programme qui inverse la matrice N pour différentes valeurs de n et mémoriser le temps de calcul à chaque fois. Essayer de mettre en évidence à quelle vitesse par rapport à n (est-ce en n, n^2, n^3, $n^{2.3}$?) l'algorithme est capable d'inverser la matrice (on pourra penser travailler en logarithme et faire une représentation graphique...). Faîtes la même chose en considérant maintenant des matrices symétriques (trouver une astuce pour en simuler facilement...). Résultat? Est-ce la même vitesse? Utiliser alors l'inversion par la commande *chol2inv*. Résultat? Et qu'en est-il du calcul du déterminant?