

Espaces euclidiens et préhilbertiens

- (4) (***) Soit E l'ensemble des fonctions définies sur $[0, 1]$. Montrer que l'application $f, g \in E \mapsto \sup_{x \in [0, 1]} |f(x)| |g(x)|$ n'est pas un produit scalaire.

Proof. Ce n'est clairement pas un produit scalaire car si on prend $f(x) = 1$, on a $\langle f, f \rangle = 1$ et $\langle f, -f \rangle = 1$ ce qui contredit l'hypothèse de bilinéarité.

Il est plus intéressant de considérer $f, g \in E \mapsto \sup_{x \in [0, 1]} f(x)g(x)$ qui n'est pas un produit scalaire non plus: par exemple pour $f(x) = x$ et $g(x) = 1$, on a $\langle f, g \rangle = 1$ et $\langle -f, g \rangle = 0$ ce qui contredit l'hypothèse de bilinéarité. \square

- (6) (***) Soit E l'ensemble des suites numériques $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telles que $\sum_{n=0}^{\infty} u_n^2 < \infty$. Montrer que pour $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, $2|xy| \leq x^2 + y^2$. En déduire que E est bien un espace vectoriel, que l'application $(u_n)_n, (v_n)_n \in E \mapsto \sum_{n=0}^{\infty} u_n v_n$ existe bien, puis que c'est un produit scalaire sur E .

Proof. L'inégalité se montre en utilisant $(|x| - |y|)^2 \geq 0$. E est un sev de l'ensemble des suites numériques: la stabilité par la multiplication est évidente et pour montrer la stabilité pour l'addition on utilise le fait que $(u_n + v_n)^2 \leq 2(u_n^2 + v_n^2)$. Enfin, on vérifie aisément toutes les propriétés du produit scalaire (sorte de généralisation à n infini du produit scalaire euclidien classique sur \mathbb{R}^n). \square

- (7) Après avoir introduit un produit scalaire adéquat, montrer les inégalités suivantes :

(a) pour $x, x', y, y' \in \mathbb{R}^2$, $|xx' + yy'| \leq \sqrt{x^2 + y^2} \sqrt{(x')^2 + (y')^2}$.

(b) $\int_0^1 \frac{\cos t}{\sqrt{1+t^2}} dt \leq \left(\int_0^1 \cos^2(t) dt \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_0^1 \frac{1}{1+t^2} dt \right)^{\frac{1}{2}} = \dots?$

(c) Pour $P \in \mathbb{R}[X]$, $\left(\int_{-1}^1 t^2 P(t) dt \right)^2 \leq \frac{2}{3} \int_{-1}^1 t^2 P^2(t) dt$.

Proof. On utilise l'inégalité de Cauchy-Schwarz dans les 3 cas, avec les produits scalaires: pour (a), $\langle (x, y), (x', y') \rangle = xx' + yy'$, pour (b), $\langle f, g \rangle = \int_0^1 f(t)g(t)dt$, pour (c), $\langle P, Q \rangle = \int_{-1}^1 t^2 P(t)Q(t)dt$. \square

- (8) Soit $E = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ l'espace vectoriel constitué des matrices carrées de taille n à coefficients réels. Montrer que l'application $\langle M, N \rangle := \text{Tr}({}^t M N)$ est un produit scalaire sur E . Déterminer $D_n(\mathbb{R})^\perp$ où $D_n(\mathbb{R})$ est l'ensemble des matrices diagonales de E .

Proof. On sait que $\text{Tr}(AB) = \text{Tr}(BA)$ et $\text{Tr}({}^t A) = \text{Tr}(A)$: on en déduit donc la propriété de symétrie du produit scalaire. Comme $\text{Tr}(A+B) = \text{Tr}(A) + \text{Tr}(B)$, on en déduit la propriété de bilinéarité. Un rapide calcul donc $\text{Tr}({}^t AA) = \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n a_{ki}^2$ pour $A = (a_{ij})$ donc $\langle A, A \rangle \geq 0$. Enfin $\langle A, A \rangle = 0$ entraîne $a_{ki} = 0$ pour tout k et i dans $\{1, \dots, n\}$, donc $A = 0$.

Il est clair d'après le cours que $\dim(D_n(\mathbb{R})^\perp) = n^2 - n$ car $\dim E = n^2$ et $\dim(D_n(\mathbb{R})) = n$. Soit M_{ij} la matrice carrée de taille n telle que M_{ij} est nulle partout sauf pour la ligne i et la colonne j où l'on a 1. Soit D une matrice diagonale quelconque. Il est clair que si $i \neq j$, alors $\text{Tr}({}^t D M_{ij}) = 0$ car ${}^t D M_{ij}$ n'est pas une matrice diagonale, donc $\langle D, M_{ij} \rangle = 0$. Ainsi $M_{ij} \in D_n(\mathbb{R})^\perp$ pour tout $i \neq j$. Or la famille de matrices $(M_{ij})_{i,j}$ forme une base de E , donc la famille $(M_{ij})_{i \neq j}$ est libre et de cardinal $n^2 - n$: elle est donc génératrice et donc une base de $D_n(\mathbb{R})^\perp$. \square

- (10) (***) On considère $E = \mathbb{R}^3$ canonique muni du produit scalaire euclidien usuel et $e = (e_1, e_2, e_3)$ sa base canonique. Soit $a = (1, 1, 1)$ et $F = \{(x_1, x_2, x_3) \in E, x_1 - x_2 + x_3 = 0 \text{ et } x_1 = x_3\}$.
- (a) Montrer que F est un s.e.v. de E dont on précisera une base dans e et la dimension.
- (b) Déterminer une base orthonormale de F . En déduire pour $x \in E$, $p_F(x)$ la projection orthogonale de x sur F .
- (c) Déterminer F^\perp . Calculer de deux manières différentes pour $x \in E$, $p_{F^\perp}(x)$ la projection orthogonale de x sur F^\perp .
- (d) Calculer $d(a, F)$.

Proof. (a) On montre facilement que si u_1 et u_2 sont dans F , si $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$, alors $\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 \in F$: F est bien un sev de E . On voit que F est la réunion de 2 plans vectoriels non liés, donc F est un droite vectoriel de base $((1, 2, 1))$

de dimension 1.

(b) Comme $\|(1, 2, 1)\| = \sqrt{6}$, on en déduit que $f_1 = (1, 2, 1)/\sqrt{6}$ est une base orthonormale de F . On sait que $p_F(x) = \langle x, f_1 \rangle f_1$, donc si $x = (x_1, x_2, x_3)$, on a $p_F(x) = (x_1 + 2x_2 + x_3)(1, 2, 1)/6$.

(c) Il est clair que $\dim F^\perp = 2$. On vérifie aisément que $f_2 = (1, 0, -1)$ et $f_3 = (1, -1, 1)$ sont deux vecteurs libres appartenant à F^\perp car orthogonaux à $(1, 2, 1)$. On a $p_{F^\perp}(x) = x - p_F(x) = (5x_1 - 2x_2 - x_3, -2x_1 + 2x_2 - 2x_3, -x_1 - 2x_2 + 5x_3)/6$. Autre méthode: par le procédé de Gram-Schmidt (ou bien directement), on a $f'_2 = (1, 0, -1)/\sqrt{2}$ et $f'_3 = (1, -1, 1)/\sqrt{3}$ qui forme une b.o.n. de F^\perp . Alors $p_{F^\perp}(x) = \langle x, f'_2 \rangle f'_2 + \langle x, f'_3 \rangle f'_3$ et on retrouve ce qui précède. \square

- (12) (**) Soit P un projecteur sur F parallèlement à G , où F et G sont deux sev en somme directe d'un espace vectoriel euclidien E (c'est-à-dire que $P(x_F + x_G) = x_F$ pour tout $x_F \in F, x_G \in G$). Montrer que si pour tout $x \in E$, $\|p(x)\| \leq \|x\|$ avec $\|\cdot\|$ une norme euclidienne de E , alors P est un projecteur orthogonal (soit F orthogonal à G).

Proof. Supposons que F n'est pas orthogonal à G . Considérons $u \in G^\perp$ tel que $u \notin F$ (un tel u existe car sinon F serait orthogonal à G). Alors $u - P_F(u) \in G$ et $u - P_F(u)$ est non nul car sinon cela signifierait que $u \in F$ que l'on a supposé distinct de G^\perp , donc u et $u - P_F(u)$ sont orthogonaux. On peut donc appliquer le Théorème de Pythagore et $\|u - P_F(u)\|^2 + \|u\|^2 = \|P_F(u)\|^2$ donc $\|P_F(u)\| > \|u\|$ ce qui contredit le fait que pour tout $x \in E$, $\|p(x)\| \leq \|x\|$. F n'est donc pas orthogonal à G . \square

- (13) (**) On munit \mathbb{R}^n du produit scalaire usuel. Soit $H = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n, a_1x_1 + \dots + a_nx_n = 0\}$ où (a_1, \dots, a_n) sont des réels donnés non tous nuls. Chercher la matrice dans la base canonique de \mathbb{R}^n de la projection orthogonale sur H .

Proof. H^\perp est de dimension 1 car $\dim H = n - 1$. On montre que le vecteur (a_1, \dots, a_n) forme une base de H^\perp (non nul puisque les a_i sont non tous nuls), puisque si $x \in H$ alors $\langle (a_1, \dots, a_n), x \rangle = 0$. D'où $(a_1, \dots, a_n)/\sqrt{a_1^2 + \dots + a_n^2}$ est une base orthonormale de H^\perp . Il est clair que $p_H(x) = x - p_{H^\perp}(x)$ et $p_{H^\perp}(x) = \frac{\langle x, (a_1, \dots, a_n) \rangle (a_1, \dots, a_n)}{(a_1^2 + \dots + a_n^2)} = (a_1^2 + \dots + a_n^2)^{-1} (a_1 \sum_{i=1}^n a_i x_i, \dots, a_n \sum_{i=1}^n a_i x_i)$. En conséquence, $p_H(x) = (a_1^2 + \dots + a_n^2)^{-1} (\sum_{i=1}^n a_i (a_i x_1 - a_1 x_i), \dots, \sum_{i=1}^n a_i (a_i x_n - a_n x_i))$, ce qui donne les coefficients de la matrice. \square

- (14) (**) Soit $E = \mathcal{C}^0([-1, 1], \mathbb{R})$ l'espace vectoriel des fonctions continues de $[-1, 1]$.
- (a) Montrer que l'on définit un produit scalaire sur E en posant $\langle f, g \rangle = \int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} f(x)g(x)dx$.
- (b) On considère le sous-espace $F = \mathbb{R}_2[X]$ de E . Trouver une base orthogonale de F (polynômes de Tchébycheff de première espèce).
- (c) Quelle est la meilleure approximation de $f(x) = \sqrt{1-x^2}$ dans $\mathbb{R}_2[X]$ pour ce produit scalaire.

Proof. (a) On montre que l'on définit bien un produit scalaire, d'abord en montrant que $\langle f, g \rangle$ existe pour toutes fonctions f et g : pour ce faire, comme f et g sont des fonctions continues, le problème de convergence a lieu en 1 et en -1 ; en 1 par exemple, $f(t)g(t)(1-t^2)^{-1/2} \sim f(1)g(1)2^{-1/2}(1-t)^{-1/2}$ pour $t \rightarrow 1$, et par le théorème de comparaison des intégrales, comme $\int_0^1 (1-t)^{-1/2} dt$ existe (intégrale de Riemann), alors $\int_0^1 f(t)g(t)(1-t^2)^{-1/2} dt$ existe. Même chose en -1 . Les 4 propriétés du produit scalaire se montrent alors classiquement.

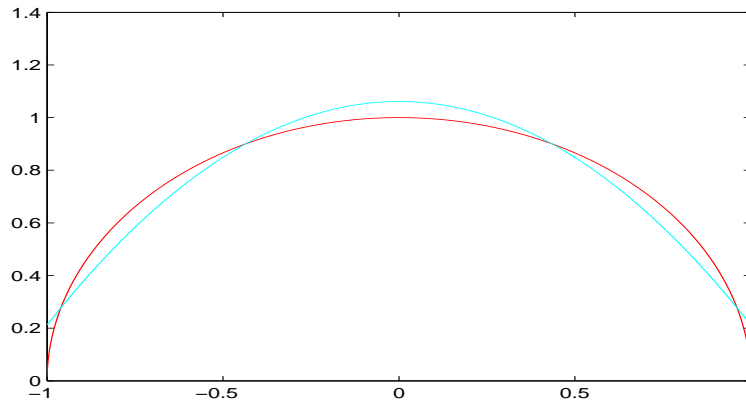
(b) On part de $(1, X, X^2)$, base de $\mathbb{R}_2[X]$. Or $\langle 1, X \rangle = 0$ (intégrale d'une fonction impaire sur $(-1, 1)$), $\langle X, X^2 \rangle = 0$ de même. Donc par le procédé de Gram-Schmidt, $e_1 = 1/\|1\|$, $e_2 = X/\|X\|$ et $e_3 = (X^2 - \langle X^2, e_1 \rangle e_1) / \|X^2 - \langle X^2, e_1 \rangle e_1\|$ est une base orthonormale de F . Or $\|1\|^2 = [\text{Arcsin}(t)]_{-1}^1 = \pi$ et $\|X\|^2 = \sqrt{\pi} \langle X^2, e_1 \rangle = [\text{Arcsin}(t)]_{-1}^1 - \int_{-1}^1 (1-t^2)^{1/2} dt = \pi - \int_0^\pi \sin^2 \theta d\theta = \pi/2$, d'où $X^2 - \langle X^2, e_1 \rangle e_1 = X^2 - 1/2$, soit $\|X^2 - \langle X^2, e_1 \rangle e_1\|^2 = \int_{-1}^1 (t^2 - 1/2)^2 (1-t^2)^{-1/2} dt = \int_0^\pi (\cos^2 \theta - 1/2)^2 d\theta = \frac{1}{4} \int_0^\pi \cos^2(2\theta) d\theta = \pi/8$. Ainsi on trouve:

$$e_1 = \frac{1}{\sqrt{\pi}}, \quad e_2 = X \sqrt{\frac{2}{\pi}} \quad \text{et} \quad e_3 = (X^2 - \frac{1}{2}) \sqrt{\frac{8}{\pi}}.$$

- (c) Il suffit de calculer $P_F(\sqrt{1-X^2})$, où P_F est la projection orthogonale sur F . Mais:

$$\begin{aligned} P_F(\sqrt{1-X^2}) &= \langle \sqrt{1-X^2}, e_1 \rangle e_1 + \langle \sqrt{1-X^2}, e_2 \rangle e_2 + \langle \sqrt{1-X^2}, e_3 \rangle e_3 \\ &= \frac{1}{\pi} \left(2 + 0 + 8 * \left[\frac{t^3}{3} - \frac{t}{2} \right]_{-1}^1 (X^2 - \frac{1}{2}) \right) = \frac{2}{3\pi} (5 - 4X^2). \end{aligned}$$

Voir l'approximation sur la figure ci-dessous, où en rouge est la fonction $x \rightarrow \sqrt{1-x^2}$ et en bleu la fonction $x \rightarrow \frac{2}{3\pi}(5-4x^2)$:



□

- (15) (***) Calculer le minimum sur \mathbb{R}^2 de $f(a, b) = \int_0^\pi (x^2 + ax + b)^2 \sin(x) dx$. Indication : On pourra penser à une projection après avoir introduit le produit scalaire $\langle f, g \rangle = \int_0^\pi f(t)g(t) \sin(t) dt$.

Proof. Le produit scalaire proposé en est un car $\sin t$ est positive sur $[0, \pi]$. On a $f(a, b) = \|x^2 - (-ax - b)\|^2$ donc on recherche $\inf_{v \in F} \|u - v\|^2$ avec u le vecteur $x \mapsto x^2$ et F le sev engendré par les fonctions $x \mapsto 1$ et $x \mapsto x$, soit $F = \mathbb{R}_1[X]$. Comme on a affaire à un sev de dimension finie (= 2) il existe un projeté orthogonal de u sur F , donc $\inf_{a, b \in \mathbb{R}^2} f(a, b) = \|u - P_F(u)\|^2$. Il est clair que $P_F(u) = -a_0x - b_0$ avec a_0 et b_0 tels que $\langle x^2 + a_0x + b_0, 1 \rangle = \langle x^2 + a_0x + b_0, x \rangle = 0$ puisque $x^2 + a_0x + b_0 \in F^\perp$. Il nous faut donc calculer des intégrales de type $I_k = \int_0^\pi x^k \sin(x) dx$, qui s'obtiennent par intégrations par parties, puisque pour $k \geq 2$, $I_k = [-\cos(x)x^k]_0^\pi + k \int_0^\pi x^{k-1} \cos(x) dx = \pi^k + k([x^{k-1} \sin(x)]_0^\pi - k(k-1)I_{k-2}) = \pi^k - k(k-1)I_{k-2}$. Comme $I_0 = 2$ et $I_1 = \pi$, on a $I_2 = \pi^2 - 4$ et $I_3 = \pi^3 - 6\pi$. D'où $I_3 + a_0I_2 + b_0I_1 = 0$ et $I_2 + a_0I_1 + b_0I_0 = 0$, d'où $a_0 = (I_2I_1 - I_0I_3)/(I_0I_2 - I_1^2) = -\pi$ et $b_0 = 2$. On conséquence $P_F(u) = \pi x - 2$ et $\inf_{a, b \in \mathbb{R}^2} f(a, b) = \int_0^\pi (x^2 - \pi x + 2)^2 \sin(x) dx = I_4 - 2\pi I_3 + (\pi^2 + 4)I_2 - 4\pi I_1 + 4I_0 = \pi^4 - 12\pi^2 + 48 - 2\pi(\pi^3 - 6\pi) + (\pi^2 + 4)(\pi^2 - 4) - 4\pi^2 + 8 = 40 - 4\pi^2 \simeq 0.52$. □

- (1) (***) Soit E un espace euclidien de dimension n muni d'un produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle_1$ et (e_1, \dots, e_n) une base orthonormale de E pour $\langle \cdot, \cdot \rangle_1$. Soit $\langle \cdot, \cdot \rangle_2$ un produit scalaire sur E tel qu'il existe $x_0 \in E$ vérifiant $\langle x_0, x_0 \rangle_1 \neq \langle x_0, x_0 \rangle_2$. Montrer que (e_1, \dots, e_n) n'est pas une base orthonormale pour $\langle \cdot, \cdot \rangle_2$.
- (18) (***) Soit E un espace euclidien muni d'un produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$ et de la norme associée. Pour $x \in E \setminus \{0\}$, on pose $f(x) = \frac{x}{\|x\|^2}$.
- (a) Montrer que f vérifie $f^2 = f \circ f = Id_E$.
 - (b) Montrer que pour tout $x, y \in E \setminus \{0\}$, $\|f(x) - f(y)\| = \frac{\|x - y\|}{\|x\| \|y\|}$.
 - (c) Soit $a, b, c, d \in E$. Montrer que: $\|a - c\| \|b - d\| \leq \|a - b\| \|c - d\| + \|b - c\| \|a - d\|$ (Indication: se ramener au cas $a = 0$ et utiliser l'application f).

Proof. (a) $f(f(x)) = f(x/\|x\|^2) = (x/\|x\|^2)/\|x/\|x\|^2\|^2 = \|x\|^4/(\|x\|^2\|x\|^2)x = x$.

(b) $\|f(x) - f(y)\| = \left\| \frac{x}{\|x\|^2} - \frac{y}{\|y\|^2} \right\| = \frac{1}{\|x\|^2\|y\|^2} \|x\|y\|^2 - y\|x\|^2\|^2$.

Mais $\|x\|y\|^2 - y\|x\|^2\|^2 = \|x\|^2\|y\|^4 - 2\|x\|^2\|y\|^2 \langle x, y \rangle + \|x\|^4\|y\|^2 = \|x\|^2\|y\|^2\|x - y\|^2$.

D'où $\|x\|y\|^2 - y\|x\|^2\|^2 = \|x\|^2\|y\|^4 - 2\|x\|^2\|y\|^2 \langle x, y \rangle + \|x\|^4\|y\|^2 = \|x\|\|y\|\|x - y\|$ et $\|f(x) - f(y)\| = \frac{\|x - y\|}{\|x\| \|y\|}$.

(c) On applique l'inégalité triangulaire, soit $\|f(b) - f(d)\| \leq \|f(b) - f(c)\| + \|f(c) - f(d)\|$, d'où en remplaçant,

$$\frac{\|b - d\|}{\|b\| \|d\|} \leq \frac{\|b - c\|}{\|b\| \|c\|} + \frac{\|c - d\|}{\|c\| \|d\|},$$

et en multipliant le tout par $\|b\| \|d\| \|c\|$, on obtient $\|c\|\|b - d\| \leq \|b - c\| \|d\| + \|c - d\| \|b\|$. On a l'inégalité demandée pour $a = 0$. Maintenant, si on applique cette inégalité à $b' = b - a$, $c' = c - a$, $d' = d - a$, on obtient bien $\|c - a\|\|b - d\| \leq \|b - c\| \|d - a\| + \|c - d\| \|b - a\|$. □

- (19) (*****) Soit $E = \mathcal{C}^0([0, 1], \mathbb{R})$ l'espace vectoriel des fonctions continues de $[0, 1]$ dans \mathbb{R} muni du produit scalaire défini par $\langle f, g \rangle = \int_0^1 f(t)g(t)dt$. Soit $F = \mathbb{R}[X]$ le sous-espace vectoriel des fonctions polynomiales et soit $g(x) = e^x$ pour $x \in [0, 1]$.
- (a) Montrer que $g \notin F$.
- (b) Montrer qu'il existe une suite (f_n) de fonctions polynomiales (à préciser) convergeant vers g pour la norme euclidienne.
- (c) En déduire que $F^\perp = \{0\}$.

Proof. (a) On a $g^{(k)}(0) = 1$ pour tout $k \in \mathbb{N}$, donc g ne peut pas être un polynôme car sinon sa dérivée s'annulerait forcément à partir d'un certain rang.

(b) Par la formule de Taylor-Lagrange, pour tout $x \in [0, 1]$ il existe $c_x \in [0, 1]$ tel que $g(x) = \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!} + e^{c_x} \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}$, donc si $f_n(x) = \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!}$, on a $|g(x) - f_n(x)| \leq e \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}$ pour tout $x \in [0, 1]$. Ainsi $\|g - f_n\| \leq e \left(\int_0^1 \frac{x^{2n+2}}{(n+1)!^2} dx \right)^{1/2} \leq e \frac{1}{\sqrt{2n+3}(n+1)!}$ donc $\|g - f_n\| \rightarrow 0$ quand $n \rightarrow \infty$.

(c) (**Attention: question très difficile!**) On sait que $g \notin F$, donc pour tout $P \in F$, $\|g - P\| > 0$ (car sinon, d'après la propriété 4 du produit scalaire, $g - P = 0$ donc $g = P \in F$). De plus, d'après la question 2, $\inf_{P \in F} \|g - P\| \leq \|g - f_n\|$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ donc $\inf_{P \in F} \|g - P\| = 0$. Donc il n'existe pas $Q_g \in F$ tel que $\|g - Q_g\| = \inf_{P \in F} \|g - P\| = 0$. g n'admet donc pas de projeté orthogonal sur F et on ne peut pas essayer de considérer la relation $g = p_F(g) + p_{F^\perp}(g)$... En fait, on sait (Théorème de Stone-Weierstrass) que pour toute fonction continue u sur $[0, 1]$, il existe une suite $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telle que $P_n \in \mathbb{R}_n[X]$ et $\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{x \in [0, 1]} |u(x) - P_n(x)| = 0$. Comme $\|u - P_n\| \leq \sup_{x \in [0, 1]} |u(x) - P_n(x)|$, comme dans $\mathbb{R}_n[X]$ qui est un sev de dimension finie il existe un unique projeté orthogonal $p_n(u)$ de u dans $\mathbb{R}_n[X]$, alors par définition $\|u - p_n(u)\| \leq \|u - P_n\| \rightarrow 0$ quand $n \rightarrow \infty$. Soit $u \in (\mathbb{R}_n[X])^\perp$. Alors d'après Pythagore, $\|u\|^2 + \|p_n(u)\|^2 = \|u - p_n(u)\|^2$ car $p_n(u) \in \mathbb{R}_n[X]$. D'après ce qui précède, on en déduit donc que quand $n \rightarrow \infty$, $\|u\|^2 + \|p_n(u)\|^2 \rightarrow 0$, soit $\|u\|^2 \rightarrow 0$, ce qui signifie que si $u \in \bigcap_{n \in \mathbb{N}} (\mathbb{R}_n[X])^\perp$ alors $u = 0$ (d'après la propriété 4 du produit scalaire). Enfin, comme $\mathbb{R}_n[X] \subset \mathbb{R}[X]$, on sait que $(\mathbb{R}[X])^\perp \subset (\mathbb{R}_n[X])^\perp$ et ainsi si $u \in (\mathbb{R}[X])^\perp$ alors $u \in \bigcap_{n \in \mathbb{N}} (\mathbb{R}_n[X])^\perp$ et donc $u = 0$: $F^\perp = (\mathbb{R}[X])^\perp = \{0\}$. \square