

Licence M.I.A.S.H.S. deuxième année 2016 – 2017

Méthodes Numériques S4

Contrôle continu n°2, avril 2016

Examen de 1h30. Tout document ou calculatrice est interdit.

1. (Sur 8 points) Soit le programme:

```
n=100; k=c(1:n)/n
I0=sum(cos(k^{5/2}*log(k)))/n; I0
```

- (a) Expliquer ce qui a été fait. Préciser la formule de l'objet mathématique I qui a été ainsi approché? Montrer que cet objet était bien défini (0.5pts).
- (b) On a obtenu [1] 0.9953766. Quelle borne peut-on donner à la précision de cette valeur?
- (c) On compile désormais le programme suivant:

```
n=100; k1=c(1:(n-1))/n; k2=c(1:n)/n
I1=(1+sum(cos((k1)^{5/2}*log(k1)))+sum(cos((k2)^{5/2}*log(k2))))/(2*n)
I1-I0
```

Qu'a-t-on fait? Expliquer pourquoi y-a-t-il un 1 dans la formule On trouve > [1] 0. Expliquer pourquoi plus généralement les deux approximations effectuées pour calculer $I0$ et $I1$ donne toujours exactement le même résultat dès que $f(a) = f(b)$.

- (d) Donner le programme permettant de calculer une approximation $I2$ encore plus fine de I . Or pour $n = 100$, on trouve $I2 = 0.9869834$. Est-ce une meilleure approximation? Qu'est-ce qui permet d'expliquer que cette fois-ci l'approximation $I2$ est moins bonne que les précédentes?

2. (Sur 10 points) On considère la fonction $f(x) = 2 \sin(x/6) - 1$.

- (a) Etudier la fonction f sur $[0, 3\pi]$. Combien f admet-elle de zéros et quels sont-ils?
- (b) On considère la fonction g telle que $g(x) = x - f(x)/f'(x)$ pour $x \in [0, \pi]$. Montrer que g existe, puis que g est croissante sur $[0, \pi]$.
- (c) Soit le programme:

```
u=0; n=6;
for (p in c(1:n))
u[p+1]=u[p]-3*(2*sin(u[p]/6)-1)/cos(u[p]/6)
pi-u
```

Qu'a-t-on fait? En vous aidant de la question précédente, démontrer que la suite $(u[p])$ ainsi définie est croissante et appartient à $[0, \pi]$. En déduire que pour tout $p \in \mathbf{N}^*$, $\min_p |f'(u[p])| \geq \pi/9$.

- (d) En utilisant la formule du cours, montrer que pour tout $p \in \mathbf{N}^*$, $|u[p+1] - \pi| \leq C |u[p] - \pi|^2$ avec $C = 1/(8*\pi)$. Le résultat du programme est: [1] 3.141593e+00 1.415927e-01 9.258107e-04 4.122745e-08 0.000000e+00 -4.440892e-16. Qu'est-ce que cela signifie?
- (e) Quelle est la limite de cette méthode d'approximation de π ?